Le raisonnement par récurrence

A Introduction

1) Développer $(1+h)^2$, $(1+h)^3$, $(1+h)^4$

2) Vérifier que pour $n \in \{0;1;2;3;4\}$ et pour tout nombre réel $h > 0$, $(1+h)^n \geq 1+nh$

Exemple de raisonnement :

Nous souhaitons prouver que, h étant un nombre réel positif ou nul donné, pour tout entier naturel n, $(1+h)^n \geq 1+nh$.

- La propriété est vraie au rang $n = 0$: $(1+h)^0 \geq 1+0h$
- Supposons qu'elle est vraie pour un entier naturel p quelconque : $(1+h)^p \geq 1+ph$

  Démontrons que $(1+h)^{p+1} \geq 1+(p+1)h$:

  $$(1+h)^{p+1} = (1+h)^p(1+h) \geq (1+ph)(1+h) = 1+(p+1)h+ph^2 \geq 1+(p+1)h$$
- La propriété $(1+h)^n \geq 1+nh$ supposée vraie au rang p est donc vraie au rang $p+1$
- La vérification au rang 0 et la démonstration ci-dessus permettent d'affirmer que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

B Principe du raisonnement par récurrence

Soit une propriété qui dépend de l'entier naturel n
Si - La propriété est vraie au rang initial n_0
- La propriété supposée vraie au rang p est vraie au rang $p+1$
Alors la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$

C Exercices

1 Dans l'introduction, on a prouvé que : pour tout nombre réel $h > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+h)^n \geq 1+nh$

a) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1+n$

Appliquer ce résultat pour déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$ puis $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Soit $q > 1$. Poser $q = 1+h$ avec $h > 0$ et justifier $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

2) Soit S_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls : $S_n = 1+2+\ldots+n$

Démontrons par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (*)

a) Vérifier que cette formule est vraie pour $n = 1$

b) Supposons cette formule vraie au rang p.

Considérer $S_{p+1} = 1+2+\ldots+p+(p+1) = S_p+(p+1)$ et montrer que la formule (*) est vraie au rang $p+1$

c) Conclure

3) Démontrer par récurrence que :

a) $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

b) $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$, pour tout $n > 0$

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.