Quelques questions lors d'une étude de fonction

Déterminer ou expliquer l'ensemble de définition de la fonction f

Les fonctions polynômes, exponentielles et trigonométriques sont définies sur $\mathbb{R}$.

La fonction inverse n'est pas définie en 0 et la fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$

La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$

Pour certaines fonctions, on peut réduire l'étude à un autre intervalle

- Si f est paire, on étudie f sur $D \cap \mathbb{R}_+$, et on complète la courbe par symétrie par rapport à (Oy)
- Si f est impaire, on étudie f sur $D \cap \mathbb{R}_+$, et on complète la courbe par symétrie par rapport au point O
- Si C_f admet un axe de symétrie (Δ) d'équation $x = a$, on étudie f sur $[a;+\infty[\cap D$, et on complète par symétrie par rapport à (Δ). (2 méthodes pour les axes ou centres de symétrie, on doit connaître en particulier le changement de repère)
- Si C_f admet un centre de symétrie $\Omega(a;b)$, on étudie f sur $[a;+\infty[\cap D$, et on complète par symétrie par rapport au point Ω.
- Si f est périodique de période T, on étudie f sur $D\cap I$ où I est un intervalle de longueur T.

  Lorsque f est, de plus, paire ou impaire, on prendra pour I l'intervalle de centre O, $[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]$,de

manière à ne considérer par la suite que l'intervalle d'étude $D\cap[0;\frac{T}{2}]$ et on complétera par symétrie.

Détermination des limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f.

La limite peut être évidente

Si la fonction est définie en le point où l'on cherche la limite, cette dernière est égale à la valeur en le point

Sinon, on utilise une des nombreuses méthodes pour tenter de lever l'indétermination

Dans tous les cas, on tente de se ramener à l'une des limites classiques (celles du formulaires)

On peut alors effectuer des changements de variables pour se rapprocher d'une limite connue ou plus simple.

On peut également déterminer une limite par comparaison et non pas directement

On en déduit d'éventuelles asymptotes à la courbe : horizontales, verticales, obliques

Possibilité de démontrer des asymptotes autres qu'affines : paraboliques, cubiques, ...).

Cette détermination peut être facilitée en recherchant une autre écriture de $f(x)$. On peut alors rechercher la position relative de la courbe par rapport à ses asymptotes. et plus encore des calculs de distances ou mesures algébriques entre une courbe et sa courbe asymptote.

Etude du sens de variation de la fonction, pour cela :

Méthode utilisant la fonction dérivée (la plus utilisée) :

On définit l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable.

les théorèmes généraux assurent l'existences d'intervalles sur lesquels la fonction est dérivable

Lorsque certaines valeurs de l'ensemble de définition ne figurent pas dans ces intervalles, on détermine si la fonction est dérivable en un point, on utilise pour cela la limite du taux d'accroissement, il faut qu'elle existe et qu'elle soit finie.

Vous devez connaître l'interprétation d'une fonction non dérivable en un point (graphiquement présence d'une tangente verticale ou deux demi-tangentes différentes). Les contre-exemples classiques sont donnés par la fonction valeur absolue et la fonction racine carrée.

On détermine la dérivée de la fonction et on étudie son signe.

Cette recherche est parfois évidente : somme de termes positifs, …

On utilise parfois le signe du trinôme : il est important de maîtriser cette technique

On peut réutiliser un signe obtenu dans une première partie de l'exercice (fonction auxiliaire)

La factorisation est parfois obligatoire : factorisation de trinôme ou plus généralement de polynômes (racine évidente puis factorisation par (x - a) puis …)

On en déduit le sens de variation de f

On dresse le tableau de variation de f (avec les limites et les valeurs exactes aux bornes des flèches)

D'autres méthodes sont possibles :

somme de deux fonctions croissantes

composées de fonctions dont on connaît les variations

Utilisation de la dérivée

La dérivée en un point permet de construire des approximations affines pour obtenir des valeurs approchées sans utiliser la calculatrice.

On peut mettre en évidence une tangente particulière ; une tangente peut être déterminée par un point et un vecteur directeur, on un point et son coefficient directeur (égal au nombre dérivé), ou une équation.

On peut effectuer des interprétations (la dérivée d'une quantité est l'expression instantanée d'une autre quantité - loi horaire en mécanique)

Recherche des lieux dont la tangente possède tel coefficient directeur.

Il est parfois possible de rechercher des dérivées successives

Utilisation des variations

Détermination des extrema éventuels (après les avoir justifié) qu'il soit local ou global

Images d'intervalles, détermination du signe d'une fonction

Lors de la résolution d'équations liées à la fonction, utiliser ses variations pour justifier l'existence de solutions et donner un encadrement

On justifie pour cela la nature bijective d'une fonction (dérivable + monotone + intervalles)

Certaines fonctions bijectives et leurs réciproques sont à connaître :puissances et racines n-ième exponentielle et logarithme.

On peut alors obtenir une valeur approchée ou un meilleur encadrement en utilisant la calculatrice.

Dresser un tableau de valeurs de la fonction.

Construction de la courbe représentative d'une fonction

On s'aide des questions précédentes pour le tracé de la courbe. On doit tenir compte du repère indiqué dans l'énoncé, sinon on le choisira judicieusement. La calculatrice graphique permet de détecter des erreurs éventuelles. On peut également s'aider de tangentes remarquables pour le tracé de la courbe. On peut alors contrôler certaines propriétés suggérées par la figure, comme la présence d'un élément de symétrie et vérifier les résultats précédents.

Il peut ensuite apparaître des questions résolues graphiquement :

Etude, suivant les valeurs d'un paramètre, du nombre de solutions d'équations, d'inéquations, …

On peut également demander de construire la courbe représentative d'une fonction associée à la première: $|f|$, kf, …

Détermination de primitives de fonctions

Soit directement, soit en calculant la dérivée d'une autre fonction

Il faut connaître la différence entre une primitive sur un intervalle, toutes les primitives et la primitive telle que …

Calcul d'aires de domaines (en unité d'aire ou en une autre unité)

Vous devez parfois transformer le domaine en un autre domaine isométrique (par une transformations classique). Il est alors peut-être plus facile de déterminer l'aire de la nouvelle surface.