Les quantificateurs et les différents types de raisonnements

Les quantificateurs

La proposition "l'hiver, il pleut" a un sens vague. On peut comprendre que "tous les jours d'hiver, il pleut" ou bien que "certains jours d'hiver, il pleut".

De façon analogue, la proposition " $x = x^2$" est incomplète puisqu'elle peut signifier "il existe au moins un nombre réel x tel que $x = x^2$" qui est une proposition vraie ou bien "quel que soit le nombre réel x, nous avons $x = x^2$" qui est une proposition fausse.

Les expressions "il existe au moins un ..." et "quel que soit ..." s'appellent des quantificateurs. Ils servent à préciser quels sont les éléments qui vérifient une propriété : "tous" ou "certains".

Compléter par un quantificateur les propositions suivantes afin qu'elles soient vraies :

1) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ 2) $(x + 1)^2=x^2 + 2x + 1$ 3) $a(b - c) +b(c - a) + c(a - b) = 0$ 4) $x^3 - 2x^2 + 1 =0$

Négation de propositions contenant un quantificateur

La négation de la proposition : "tout nombre réel est inférieur ou égal à son carré" est "il existe au moins un nombre réel supérieur à son carré".

D'une façon générale, on forme a négation de la proposition :
- "tous les *A* sont *B*" en écrivant "il existe au moins un *A* qui est non *B*"
- "il existe au moins un *A* qui est *B*" en écrivant "tous les *A* sont non *B*"

Ecrire la négation de chacune des propositions suivantes ; indiquer la valeur de vérité (vraie ou fausse) de la proposition et celle de sa négation.

1) Il existe au moins un diviseur de 12 qui n'est pas un diviseur de 18.
2) Toute fonction qui n'est pas paire est impaire.
3) Dans tout triangle, l'orthocentre est intérieur au triangle.

Les types de raisonnements

A. Raisonnement par implications

Démontrer par implications successives que si $ac < 0$, alors le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ a deux racines de signes contraires.

indication : étudier le signe du discriminant de l'équation puis celui du produit des racines

B. Raisonnement par équivalences

Soit un triangle *ABC*. On note *H* le projeté orthogonal du point *A* sur le côté [*BC*]. Démontrer par équivalences successives que le triangle *ABC* est rectangle en *A* si et seulement si $AH^2 = - \overline{HB}.\overline{HC}$.

indication : exprimer à l'aide du produit scalaire l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis décomposer ces deux vecteurs en faisant intervenir le point *H*.

C. Raisonnement par contraposition

Les deux implications (si *P* alors *Q*) et (si non *Q* alors non *P*) ont même valeur de vérité : elles sont toutes deux vraies ou toutes les deux fausses. Pour démontrer l'une, on peut aussi bien démontrer l'autre si la démonstration est plus simple.

$2p$ ($p \in \mathbb{N}$) désigne un entier naturel pair et $2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$) désigne un entier naturel impair.

a) Prouver que le carré d'un entier naturel pair est un entier naturel pair.
b) Prouver que le carré d'un entier naturel impair est un entier naturel impair.
c) Démontrer que si le carré x^2 d'un entier naturel x est pair alors x est pair.

indication : utiliser la contraposée de "si le carré x^2 d'un entier naturel x est pair alors x est pair" pour effectuer la démonstration.

D. Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prendre comme hypothèse la proposition contraire de celle que l'on veut démontrer et à déduire une contradiction. Ceci prouve que l'hypothèse qu'on a faite est fausse et que son contraire est vrai.

Démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

indication : considérer la négation de la proposition recherchée : "il existe une fraction irréductible $\frac{x}{y}$, avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}^*$ telle que $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ ". Comme $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ équivaut à $x^2 = 2y^2$, en déduire qu'il existe un entier naturel x' tel que $x = 2x'$ puis qu'il existe un entier naturel y' tel que $y = 2y'$ (utiliser le C). Prouver alors que $\frac{x}{y}$ n'est pas irréductible.

E. Raisonnement par disjonction des cas

Si une propriété est vraie pour tout élément d'une partie E d'un ensemble et fausse pour tout élément de l'autre partie (ou des autres parties) de l'ensemble, alors tout élément pour laquelle la propriété est vraie appartient à la partie E.

Soit ☟ la médiatrice du segment $[AB]$ et π le demi-plan ouvert de frontière ☟ contenant le point A. Démontrer que tout point M vérifiant $MA < MB$ appartient à π.
indication : examiner les cas $M \in \pi$, $M \in$ ☟ et $M \in \pi'$ (où π' est l'autre demi-plan ouvert)

F. Le contre-exemple

Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un cas particulier qui la met en défaut.

Démontrer que la proposition suivante est fausse : "quels que soient les nombres réels a et b :
$\sqrt{a^2 + b^2} = a^2 + b^2$

G. Raisonnement par récurrence

On l'utilise pour démontrer qu'une proposition qui dépend d'un nombre entier est vraie pour tous les nombres entiers. Le principe repose sur l'idée que si la propriété est établie au rang p et qu'on sait en déduire qu'elle est vraie au rang suivant $p + 1$, de proche en proche à partir du rang initial, on peut en déduire qu'elle est vraie pour tous les entiers.

On vérifie que la propriété est vraie au rang initial
On suppose qu'elle est vraie au rang p et avec cette hypothèse, on la démontre au rang $p + 1$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

H. Le principe des tiroirs

Lorsqu'on range des objets dans des tiroirs et que l'on a plus d'objets que de tiroirs, alors il y a un tiroirs qui contient au moins deux objets.

Cette évidence qui saute aux yeux s'est vu décerner le titre pompeux de principe : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet (du nom du célèbre mathématicien allemand du XIX$^{\text{ème}}$ siècle). D'apparence simpliste, cette proposition se révèle un outil puissant dans de nombreux domaines : arithmétique, dénombrement, vie sociale, ...
1) Les spécialistes sont d'accord : un individu n'a jamais plus de 350 000 cheveux sur la tête. Montrer qu'il existe à Paris deux personnes (au moins) ayant exactement le même nombre de cheveux.
indication : Tiroirs : les nombres de 1 à 350 000 ; Objets : les habitants de Paris
2) (les nombres jumeaux) Prendre au hasard 12 nombres entre 1 et 99. Vérifier que l'on peut trouver deux de ces nombres tels que leur différence ("le plus grand diminué du plus petit") soit un nombre jumeau, c'est-à-dire un nombre à deux chiffres identiques (comme 33, 77 ou 88 ...)
indication : en appliquant le principe des tiroirs, montrer que parmi 12 nombres distincts, il en existe toujours deux qui ont le même reste dans la division par 11.
Que dire de leur différence ?