Origine des nombres complexes :

Au cours du XVI^e siècle, en Italie deux savants Tartaglia et Cardan s'intéressent à la résolution des équations de la forme $x^3 = p\,x + q$.

Première partie :

1. Soit l'équation (E) : $x^3 = 7x - 6$
   Trouver une racine évidente α de (E).
2. Ecrire $x^3 - 7x + 6$ sous la forme $(x - \alpha)(x^2 + ax + b)$, a et b étant deux réels à déterminer.
3. Déterminer toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$

Deuxième partie :

Jérôme Cardan, en 1545, étudie l'équation (E) : $x^3 = 6x + 6$

1. Vérifier que les entiers « simples » ne sont pas solutions de (E).
2. A l'aide de votre calculatrice graphique, émettre une conjecture sur le nombre de solutions de (E)
3. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 6x - 6$
   Etablir un tableau de variation de f, en déduire le nombre de solutions de (E).
4. Voici comment Cardan procède pour trouver une solution de (E) :
   - Vérifier que $(u + v)^3$ peut s'écrire sous la forme $3uv\,(u+v) + u^3 + v^3$.
   - En posant $uv = 2$ et $u^3 + v^3 = 6$, que peut-on en déduire pour $(u+v)$?
   - Résoudre l'équation $X^2 - 6X + 8 = 0$
   - Trouver deux réels u et v tels que $\begin{cases} uv = 2 \\ u^3 + v^3 = 6 \end{cases}$
   - En déduire la solution x de l'équation de Cardan.

Cardan publie le résultat suivant : une solution de l'équation $x^3 = p\,x + q$ est donnée par la formule

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}\ ;\ si\ \ 27q^2 - 4p^3 \geq 0$$

Troisième partie

Cardan s'intéresse à l'équation $x^3 = 15\,x + 4$

1. Trouver une racine évidente α (nombre entier positif)
2. Peut-on utiliser directement la formule de Cardan ?
3. Cardan réutilise sa méthode pour retrouver cette racine évidente :
   Déterminer deux réels u et v tels que $\begin{cases} uv = 5 \\ u^3 + v^3 = 4 \end{cases}$

*Cardan est donc face à une contradiction, Bombelli (1572) invente « quelque chose » dont le carré est (–1). Ce nombre impossible ou imaginaire (ainsi l'appelle Descartes) prend la notation **i** avec Euler en 1770.*

4. En posant $i^2 = -1$, on peut écrire $-484 = 484\,i^2 = (22i)^2$
   En déduire une écriture de u + v.
5. Il reste à prouver que $u + v = \alpha$.
   Pour cela, en utilisant les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$ et sans oublier que $i^2 = -1$, calculer $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$. Conclure.

Longtemps ce nombre pose problème car il n'a pas de statut géométrique jusqu'à la fin du XVIII^e et début du XIX^e.
Le norvégien Wessel introduit un axe imaginaire perpendiculaire à l'axe des réels et interprète les vecteurs du plan comme des nombres complexes (nom donné aux nombres de la forme a + i b, avec a et b réels, par Gauss en 1831).
Depuis, le nombre a + ib, avec a et b réels, est représenté dans un repère orthonormal par le point de coordonnées (a ; b).