Lois de probabilité

I) Loi de Bernoulli

Définition

Soit E une expérience aléatoire prenant deux issues : l'une S, que l'on appelle succès de probabilité p et l'autre $\overline{S}$, appelé échec de probabilité $q = 1 - p$.
La variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec est appelée variable de Bernoulli.

La loi de probabilité de cette variable X est appelé loi de Bernoulli.

x	0	1
$p(X = x)$	$1 - p$	p

Propriétés

$E(X) = p$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1 - p)$
$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

II) Loi Binomiale

Définition

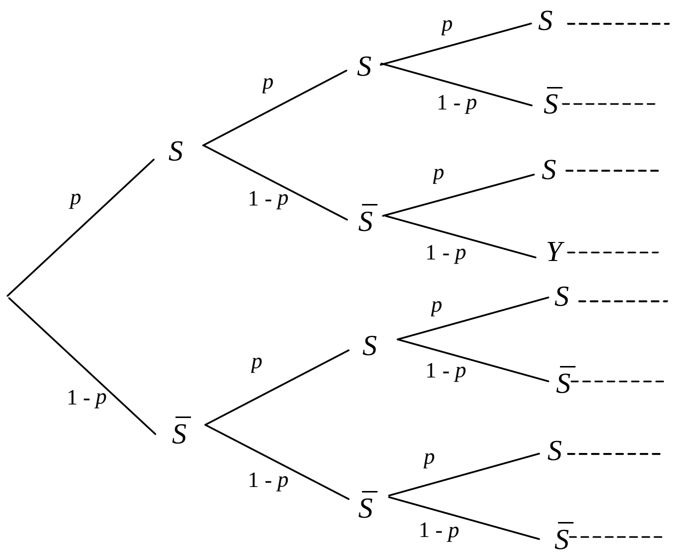
On répète n fois de manière indépendante une même expérience qui présente deux issues S et $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $1 - p$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre des succès au cours de ces n expériences s'appelle loi binomiale de paramètres n et p et est notée $B(n,p)$.

Propriété

$\forall k \in \{0; 1; \ldots; n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$

Démonstration : L'événement $X = k$ est réalisé si l'on obtient k succès et $n - k$ échecs. Les expériences étant indépendantes, obtenir k succès puis $n - k$ échecs dans cet ordre a pour probabilité $p^k(1 - p)^{n - k}$.

Il reste à déterminer le nombre de manières d'obtenir k succès et donc $n - k$ échecs sur n expériences ; il s'agit de placer les k succès sur les n expériences ce qui correspond au nombre de combinaisons de k éléments choisis parmi les n : $\binom{n}{k}$.



Propriétés

$E(X) = np$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1 - p)$
$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Exemple :

On lance un dé non pipé à 6 faces et on s'intéresse au succès "obtenir le 6". On lance 60 fois ce dé. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.

X suit une loi $B\left(60, \frac{1}{6}\right)$

$E(X) = 60 \times \frac{1}{6} = 10$: on peut s'attendre, en moyenne, sur 60 lancers, à obtenir 10 fois le 6.

III) Lois uniformes

Définition 1

On appelle loi uniforme discrète ou encore loi équirépartie, toute loi d'une variable aléatoire X qui prend n valeurs x_1, x_2, …, x_n de telle sorte que la probabilité soit la même pour chacune de ces n valeurs.

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \ldots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Définition 2

Si la variable X peut prendre toute valeur réelle de l'intervalle [0;1]; on dit que cette variable est une variable aléatoire continue sur cet intervalle.

Si, de plus, la probabilité de l'événement $a \leqslant X \leqslant b$ avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ est égale à $b - a$, la loi de cette variable aléatoire est la loi uniforme continue et on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = b - a$$

Propriétés

$P(X \leqslant a) = a$ pour $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $E(X) = \dfrac{1}{2}$

IV) Loi de durée de vie sans vieillissement

1) Densité de probabilité

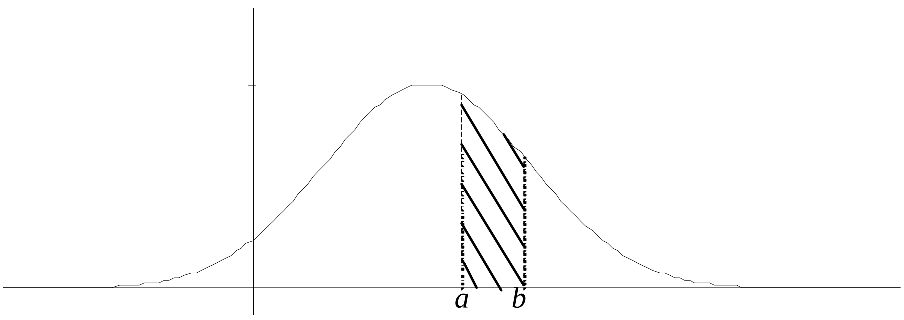
On appelle fonction densité de probabilité toute fonction f définie sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ de $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes :

- f est continue sur $[\alpha;\beta]$
- $\forall\, x \in [\alpha;\beta],\ f(x) \geqslant 0$
- $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Définition

Soit X une variable aléatoire continue, prenant ses valeurs sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction densité de probabilité définie sur I.

On dit que la loi P de X admet f comme densité de probabilité lorsque, pour tout intervalle $[a;b] \subset I$, $P([a;b]) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$



Exemple (retour sur la loi uniforme sur [0;1])

Soit f la fonction constante égale à 1 sur [0;1], 0 sinon.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b 1\,\mathrm{d}t = b - a,\quad \forall 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$$

Ainsi la loi uniforme sur [0;1] est une variable aléatoire continue qui admet cette fonction f comme densité.

2) Loi de durée de vie sans vieillissement

Définition

Soit λ un réel strictement positif.

La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est la densité d'une loi de probabilité P, appelée loi exponentielle de paramètres λ (appelée également loi de durée de vie sans vieillissement).

V) Adéquation à une loi équirépartie

Une *loi équirépartie* est une loi uniforme d'une variable aléatoire X qui peut prendre n valeurs de telle sorte que la probabilité soit la même pour chacune de ces n valeurs.

Problème : *Un joueur veut vérifier si le dé qu'il possède est « normal », c'est-à-dire bien équilibré.*
On sait que, dans ce cas-là, la loi de probabilité associée est la loi uniforme :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Pour cela, le joueur lance 200 fois le dé et note les résultats obtenus :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	31	38	40	32	28	31
f_i	0,155	0,190	0,200	0,160	0,140	0,155

Pour savoir si la distribution de fréquences obtenue est « proche » de la loi uniforme, on calcule la quantité suivante, qui prend en compte l'écart existant entre chaque fréquence trouvée et la probabilité théorique attendue :

$$d^2 = \left(0,155 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0,190 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0,200 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0,160 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0,140 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0,155 - \frac{1}{6}\right)^2.$$

(On note d^2 car son calcul est celui du carré d'une distance)
Mais rien ne permet de dire pour l'instant si cette quantité trouvée est « petite » ou « grande ». En effet, elle est soumise à la fluctuation d'échantillonnage, puisque sa valeur varie d'une série de lancers à l'autre. On va donc étudier cette fluctuation d'échantillonnage pour convenir d'un seuil entre « petite » et « grande » valeur de d^2 lorsqu'on lance 200 fois un dé. Pour cela, on génère des séries de 200 chiffres au hasard pris dans $\{1;2;3;4;5;6\}$. Les résultats trouvés pour le nombre d^2 à partir de 1 000 simulations sont résumés par le tableau suivant :

Minimum	**D_1**	**Q_1**	**Médiane**	**Q_3**	**D_9**	**Maximum**
0,000363	0,00138	0,00233	0,00363	0,00555	0,00789	0,01658

Le **neuvième décile** de la série des valeurs simulées de d^2 est 0,00789.
Cela signifie que 90 % des valeurs de d^2 obtenues au cours de ces 1 000 simulations sont dans l'intervalle [0;0,00789]. Comme la valeur observée de d^2 est inférieure à cette valeur seuil de 0,00789, on peut convenir que le dé est équilibré avec un risque de 10 %.
En effet, en utilisant cette méthode sur les données simulées, on se serait trompé dans 10 % des cas. On dit que l'on a un **seuil de confiance** de 90 %.

Propriété : Soit une épreuve conduisant aux issues a_1, a_2,.., a_q . Expérimentalement, si on répète n fois cette épreuve ($n \geqslant 100$) , on obtient les fréquences f_1, f_2 …. f_q pour chacune de ces issues.
Vérifier l'adéquation de ces données à la loi équirépartie sur $\{a_1, a_2, \ldots a_q\}$ c'est calculer

$$d^2 = \sum_{i=1}^{q} \left(f_i - \frac{1}{q}\right)^2$$

Sachant que D_9 est le neuvième décile :

- Si $d^2 \leq D_9$ alors on dira que les données sont compatibles avec le modèle de la loi uniforme au seuil de risque de 10 %.
- Si $d^2 > D_9$ alors on dira que les données ne sont pas compatibles avec le modèle de la loi uniforme au seuil de risque de 10 %.