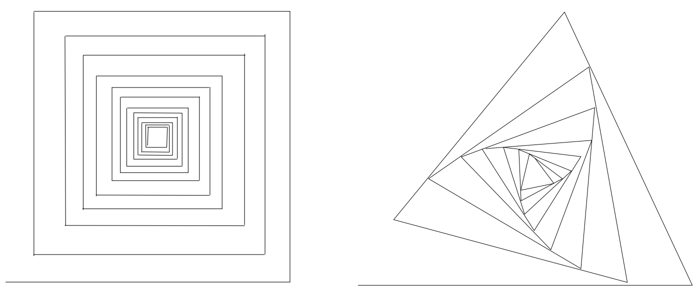
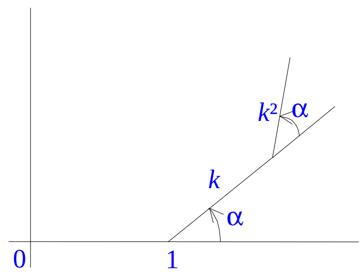
Les jolygones

Les trois dessins représentés ci-dessous sont obtenus par la même technique de construction :
- on trace un segment horizontal de longueur *a*
- on tourne de l'angle α et on trace dans le prolongement un segment horizontal de longueur *ka*
- et ainsi de suite à chaque extrémité, on tourne de α et on trace le segment suivant de longueur multipliée par *k*.



$\alpha = 90°$ et $k = 0{,}95$ $\alpha = 115°$ et $k = 0{,}9$ $\alpha = 80°$ et $k = 0{,}85$

En prenant $k < 1$, on s'assure de rester dans les limites de la feuille ; et l'on voit que les segments forment une sorte de spirale semblant tendre vers un point. Peut-on préciser ce point ?



Utilisons pour cela les nombres complexes. Si un segment représente un nombre complexe *a* alors le segment suivant, qui a tourné de α et a été multiplié par *k*, est le segment représentant $ake^{i\alpha}$.
En appelant *z* ce nombre, l'extrémité du "jolygone" de *n* segments est tout simplement associé au nombre :

$$(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) \times a = a \times \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Lorsque l'on tend vers l'infini, z^n qui a un module k^n qui tend vers zéro et donc le point vers lequel tend la spirale est le point correspondant à $a \times \frac{1}{1 - z}$.
On peut ainsi trouver l'affixe des points limites des "jolygones".