Fonctions circulaires

Fonction cosinus

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$: la fonction cosinus est périodique, de période 2π, il suffit donc d'étudier la fonction cosinus sur un intervalle de longueur 2π, soit $[-\pi;\pi]$ par exemple.

$\cos(-x) = \cos(x)$: la fonction cosinus est paire et il suffit alors d'étudier la fonction sur $[0;\pi]$.

$|\cos(x)| \leqslant 1$: la fonction cosinus est bornée sur $\mathbb{R}$

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, **$\cos'(x) = -\sin(x)$**

On en déduit le tableau de variation de la fonction cosinus sur $[0;\pi]$:

x	0		π
$\cos'(x)$	0	$-$	0
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

Comme la fonction cosinus est dérivable en 0 et $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - \cos 0}{h - 0} = 0 \text{ et donc } \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Fonction sinus

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$: la fonction sinus est périodique, de période 2π, il suffit donc d'étudier la fonction sinus sur un intervalle de longueur 2π, soit $[-\pi;\pi]$ par exemple.

$\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sinus est impaire et il suffit alors d'étudier la fonction sur $[0;\pi]$.

$|\sin(x)| \leqslant 1$: la fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, **$\sin'(x) = \cos(x)$**

On en déduit le tableau de variation de la fonction sinus sur $[0;\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Comme la fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h - \sin 0}{h - 0} = 1 \text{ et donc } \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

Représentation graphique

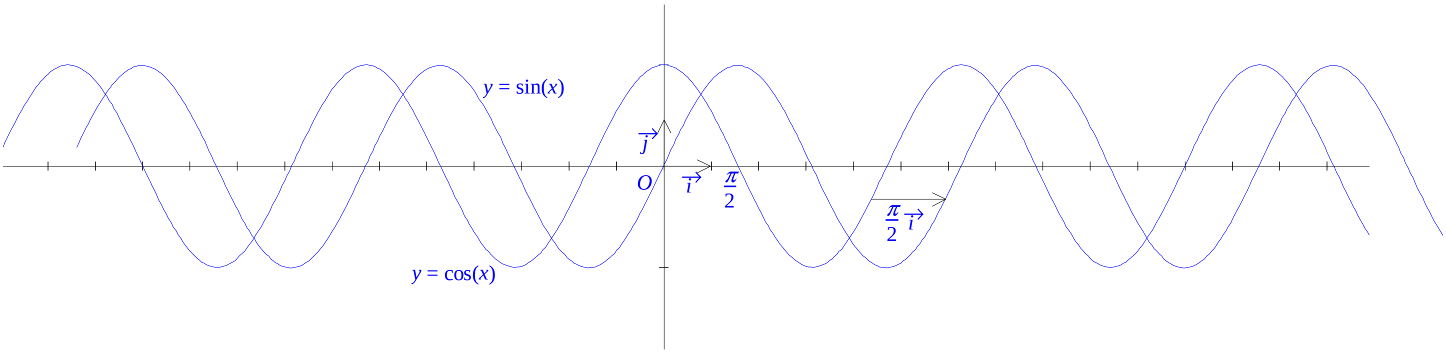
Pour tracer les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus, on utilise :

La parité (symétrie par rapport à l'origine pour la fonction sinus, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour la fonction cosinus)

La périodicité (invariance de la courbe par les translations de vecteur $k\times 2\pi\,\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$).

Ces courbes s'appellent des sinusoïdes.

Comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$, la courbe représentative de la fonction sinus se déduit de celle de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.



Fonction tangente

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$ et, pour tout réel $x\in\mathbb{R}\backslash\{k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$

$\tan(x+\pi) = \tan(x)$: la fonction tangente est périodique, de période π, il suffit donc d'étudier la fonction tangente sur un intervalle de longueur π, soit $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par exemple.

$\tan(-x) = -\tan(x)$: la fonction tangente est impaire et il suffit alors d'étudier la fonction sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle de la forme $]\frac{k\pi}{2};\frac{(k+1)\pi}{2}[$ et, pour tout réel x de cet intervalle , $\mathbf{\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction tangente sur $[0;\frac{\pi}{2}[$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	1	$+$	$\|$
$\tan(x)$	0	↗	$+\infty$ $\|$

On remarque que les droites d'équations $x = \frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, sont des asymptotes verticales à la courbe représentative de la fonction tangente.