Équation différentielle $y'=1+y^2$

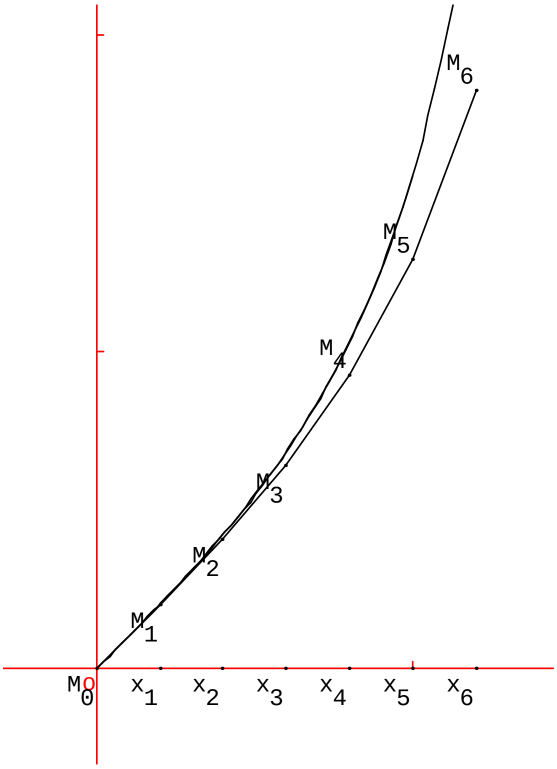
Soit l'équation différentielle $y'=1+y^2$ avec la condition initiale y(0)=0.
Une solution de cette équation sur un intervalle I contenant 0 est donc une fonction f définie et dérivable sur I qui vérifie : $\begin{cases} f(0)=0 \\ \text{Pour tout réel } x \text{ de } I : f'(x)=1+\left[f(x)\right]^2 \end{cases}$

La méthode d'Euler, déjà rencontrée en 1ère, permet de construire des solutions «approchées» de f sur un intervalle $[0;a]$ (où a est un réel strictement positif fixé) par une ligne polygonale obtenue à l 'aide d'approximations affines réitérées.

A) Principe de la méthode

On subdivise l'intervalle $[0;a]$ en n intervalles de même longueur $h=\frac{a}{n}$ (pas de la subdivision).

On note $x_0=0; x_1=h; x_2=2h; \ldots\ldots; x_k=k\cdot h \left(\text{avec } 0\le k\le n\right)$ les n+1 points de la subdivision et on note y_k les valeurs approchées de $f\left(x_k\right)$ qui vont être obtenues successivement.



Soit alors les n+1 points $M_k\left(x_k;y_k\right)$.La ligne polygonale $M_0M_1M_2\ldots\ldots\ldots\ldots M_n$ est une « approximation » de la courbe représentative de f.

1°) Puisque f(0)=0, on posera $y_0=0$ (c'est la valeur exacte !). Justifier que l'approximation affine de $f(x_1)=f(0+h)$ est h. On posera donc $y_1=h$

Justifier que l'approximation affine de $f(x_2)=f(x_1+h)$ est $f(x_1)+\left[1+\left(f(x_1)\right)^2\right]\cdot h$.

Comme y_1 est l'approximation retenue de $f(x_1)$, on posera donc $y_2=y_1+\left[1+y_1^{\,2}\right]\cdot h$

2°) On suppose avoir déterminé les réels $y_0;y_1;y_2;\ldots\ldots\ldots;y_k$.
Quelle est l'approximation affine de $f(x_{k+1})=f(x_k+h)$?
Comme y_k est l'approximation retenue de $f(x_k)$, en déduire l'expression de y_{k+1} (en fonction de y_k) qui sera alors retenue.

B)Utilisation d'un tableur

Il s'agit de calculer à l'aide d'une feuille de calculs d'un tableur les valeurs approchées $y_0;y_1;y_2;\ldots\ldots\ldots;y_n$.

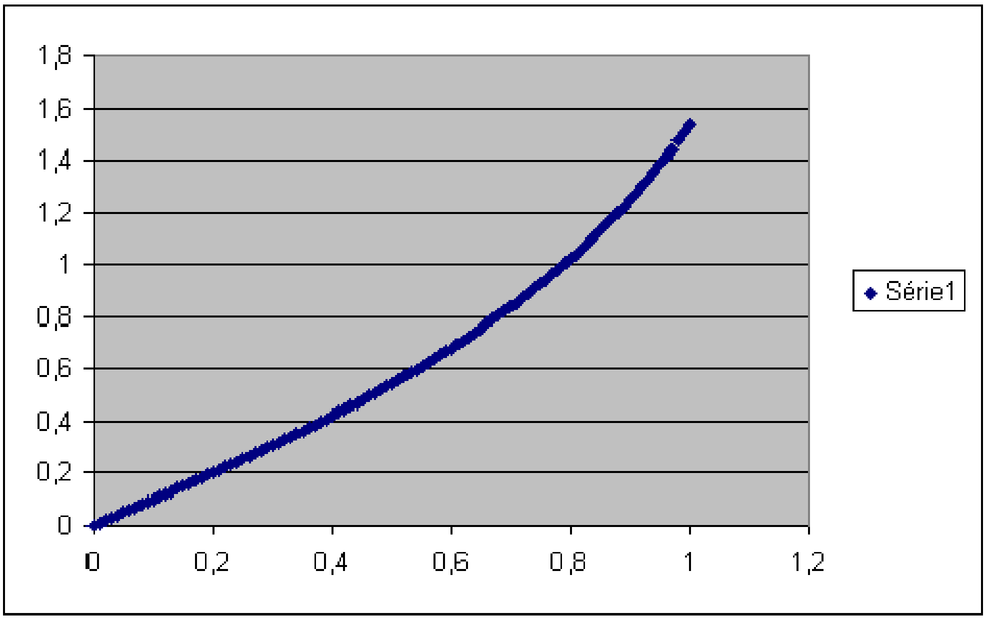
	A	B	C	D	E	F	G
1	a=		n=		pas h=	=$B$1/$D$1	
2	k	x_k	y_k	$f(x_k)$			
3	0	0	0				
4	=A3+1	=B3+$F$1	=C3+(1+C3^2)*$F$1				
5							
6							

[Rappel: les $ dans les formules servent à "fixer" la lettre et l'indice lorsqu'on recopie la formule]

1°) Justifier les formules des cellules ligne 4 qui vont être recopiées vers le bas.

2°) Expérimenter alors la feuille de calculs pour différentes valeurs de a (a=1 ; a=2 ; a=10 ;etc) et de n (n=20; n=100; n=10 000; etc).
A l'aide de l'assistant graphique, représenter chaque fois alors le nuage des points $M_k\left(x_k;y_k\right)$.

a=	1	n=	100	pas h=	0,01						
k	xk	yk	f(xk)								
0	0	0									
1	0,01	0,01									
2	0,02	0,020001									
3	0,03	0,030005									
4	0,04	0,040014									
5	0,05	0,05003									
6	0,06	0,060055									
7	0,07	0,0700911									
8	0,08	0,0801402									
9	0,09	0,0902045									
10	0,1	0,1002858									
11	0,11	0,1103864									
12	0,12	0,1205083									
13	0,13	0,1306535									
14	0,14	0,1408242									
15	0,15	0,1510225									
16	0,16	0,1612506									
17	0,17	0,1715106									
18	0,18	0,1818047									
19	0,19	0,1921353									
20	0,2	0,2025044									
21	0,21	0,2129145									
22	0,22	0,2233678									
23	0,23	0,2338668									



C) Solution effective

Soit la fonction « tangente » définie sur l'intervalle $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

1°) Justifier que tan est définie, dérivable sur I et, pour tout réel x de I, calculer $\tan' x$

2°) Vérifier alors que tan est une solution sur I de l'équation différentielle $y'=1+y^2$.

3°) Compléter la feuille de calculs pour obtenir en colonne D les valeurs $f(x_k)=\tan(x_k)$ et, à l'aide de l'assistant graphique, représenter aussi le nuage de points de coordonnées $\left(x_k;\tan x_k\right)$

4°) On démontrera(c'est l'objet de l'activité 4) que tan est l'unique solution de l'équation différentielle $y'=1+y^2$ vérifiant y(0)=0 sur tout intervalle contenant 0 (et alors nécessairement inclus dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$).

Comparer les solutions approchées obtenues à l'aide du tableur avec cette effective unique solution.

Equation différentielle $y' = y$

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable dont la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même ($f' = kf$). Soit l'équation différentielle y'= y avec la condition initiale y(0)=1.
Utiliser la méthode d'Euler et le tableur pour découvrir la solution de cette équation.