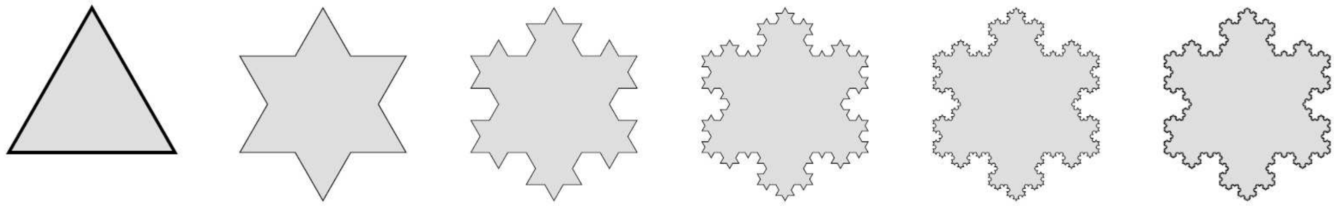
Devoir Terminale S
Le flocon de neige de Von Koch

La théorie des fractales est assez jeune (1970) et est utilisée dans toutes les disciplines scientifiques dont la médecine et même en économie. Elle permet de construire des modèles d'objets naturels complexes que la mathématique classique datant de l'Antiquité ne permet pas : des plantes, des organes humains (poumon, rein), etc.
On peut considérer qu'une fractale est un objet géométrique dans lequel chaque partie est une représentation de l'objet elle même : quelque soit le grossissement, on observera toujours les mêmes détails (on parle d'*auto-similarité* de la fractale).

La construction
Le flocon de Von Koch s'obtient par itération (fractale de type IFS - iterated function systems) : on répète toujours le même procédé de construction de façon infinie. Ici le procédé est d'enlever le tiers central de chaque segment et de remplacer cette partie par deux segments de la même longueur que celui enlevé :

Ce flocon s'obtient à partir d'un triangle équilatéral.



Flocon après 5 itérations

Périmètre et surface
Soit n le nombre d'itérations, $n \in \mathbb{N}$, on note
– c_n le nombre de côtés du flocon obtenu,
– l_n la longueur d'un côté du flocon,
– P_n le périmètre du flocon,
– A_n l'aire du flocon.
On note a la longueur d'un côté du triangle équilatéral initial. On a donc $c_0 = 3$ et $l_0 = a$.

Le côté du flocon
1) Calculer quelques valeurs de c_n et de l_n.
2) Justifier que les suites (c_n) et (l_n) sont géométriques et donner leurs éléments caractéristiques.

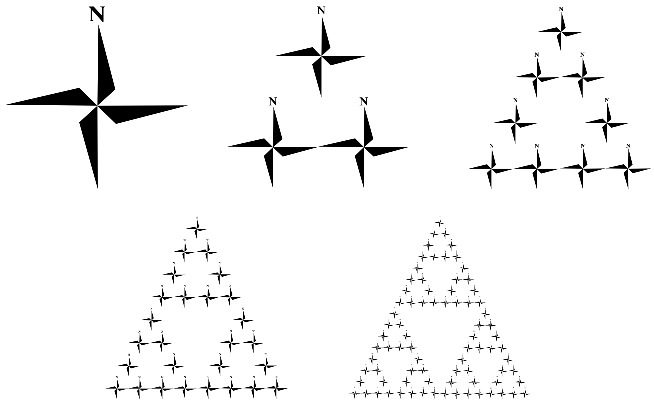
Le périmètre
1) Calculer quelques valeurs de P_n.
2) Exprimer P_n en fonction de c_n et de l_n puis en fonction de n.
3) Quelle est la nature de cette suite?
4) Déterminer la limite de P_n. Que peut-on dire du périmètre du flocon de Von Koch ?

La surface
1) Calculer A_0, A_1 puis A_2.
2) De l'étape n à l'étape $n + 1$ l'aire est augmentée de celle des c_n triangles équilatéraux de côté l_{n+1}.
En déduire A_{n+1} en fonction de A_n et de n.
3) 1ère méthode : Calculer $(A_{n+1} - A_n) + (A_n - A_{n-1}) + \cdots + (A_1 - A_0)$ de deux façons différentes.
En déduire une expression de A_{n+1} en fonction de n puis une expression de A_n en fonction de n.

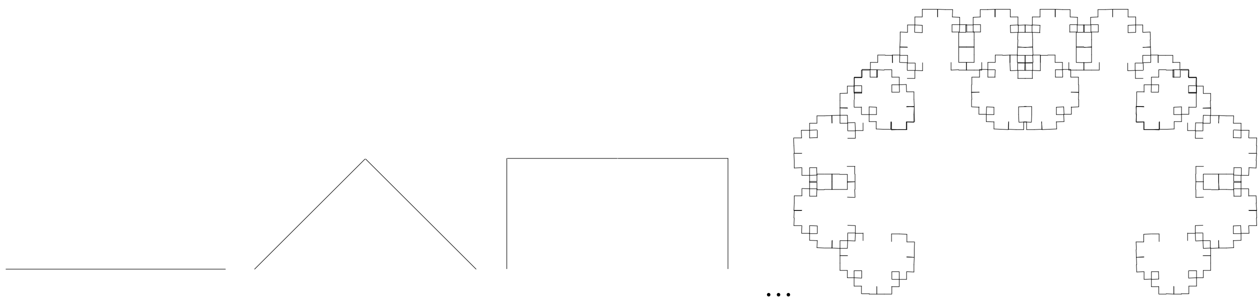
2ème méthode : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{9\sqrt{3}}{20}\left[8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$.

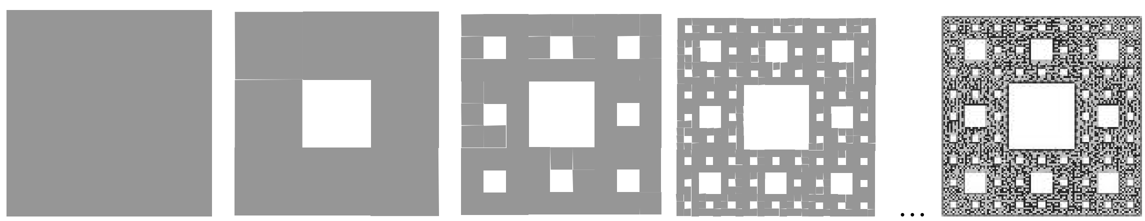
4) Déterminer la limite de A_n. Que peut-on dire de la surface du flocon de Von Koch ?
5) Quel paradoxe relevez-vous de cet exercice ?
Comment expliquer que lorsque l'on déplie nos poumons, la surface atteinte peut correspondre à celle d'un terrain de tennis ?

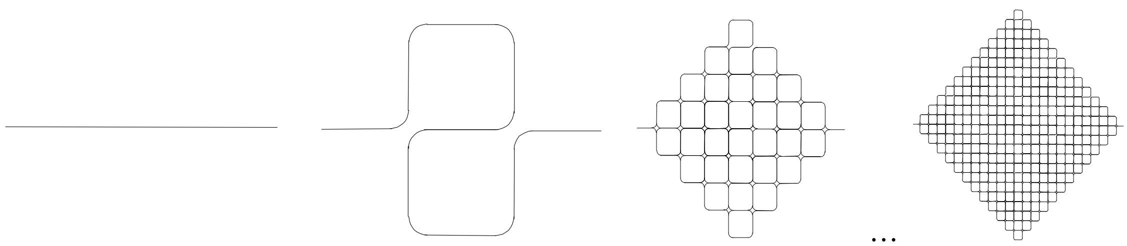
A vous d'inventer
En prenant appui sur un fractal connu et en choisissant un logo, construire à votre tour un fractal original comme sur l'exemple ci-dessous basé sur le triangle de Sierpinski.



Vous pouvez aussi créer une propriété d'autosimilarité sur le procédé de construction comme les fractales ci-dessous.







Arbres Fractales :

http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/fractale_pythagore.htm
http://www.mathcurve.com/fractals/arbre/arbre.shtml
…