Devoir Terminale S

Il s'agit ici d'étudier quelques propriétés à envisager dans l'étude de raccordements routiers. La modification brusque de direction entre deux voies routières ne peut être envisagée pour des raisons évidentes de sécurité : un véhicule pourrait être obligé d'aller sur une autre voie, voire à l'extérieur de la route pour pouvoir effectuer ce virage. Une autre raison serait l'usure de la route à l'endroit de l'effort exercé par une suite de véhicules pour tourner brusquement.

On appelle *raccorder* dans la suite de ce devoir la création d'une courbe de liaison entre deux courbes qui permet de rendre l'ensemble des courbes continu, et telle sorte que les points de raccord aient des tangentes communes.

On souhaite étudier le raccordement d'une voie rectiligne à une voie circulaire. Pour cela, la voie rectiligne sera modélisée par l'ensemble des points d'abscisses négatives sur l'axe des abscisses d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La voir circulaire sera modélisée par l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ où A est le point de coordonnées (2;1), B de coordonnées (3;2), arc de cercle (C) de centre le point $\Omega(9;-5)$. L'unité utilisée sera la centaine de mètres.

1) Faire un schéma.
Expliquer pourquoi un segment ne permet pas de *raccorder* les deux voies.

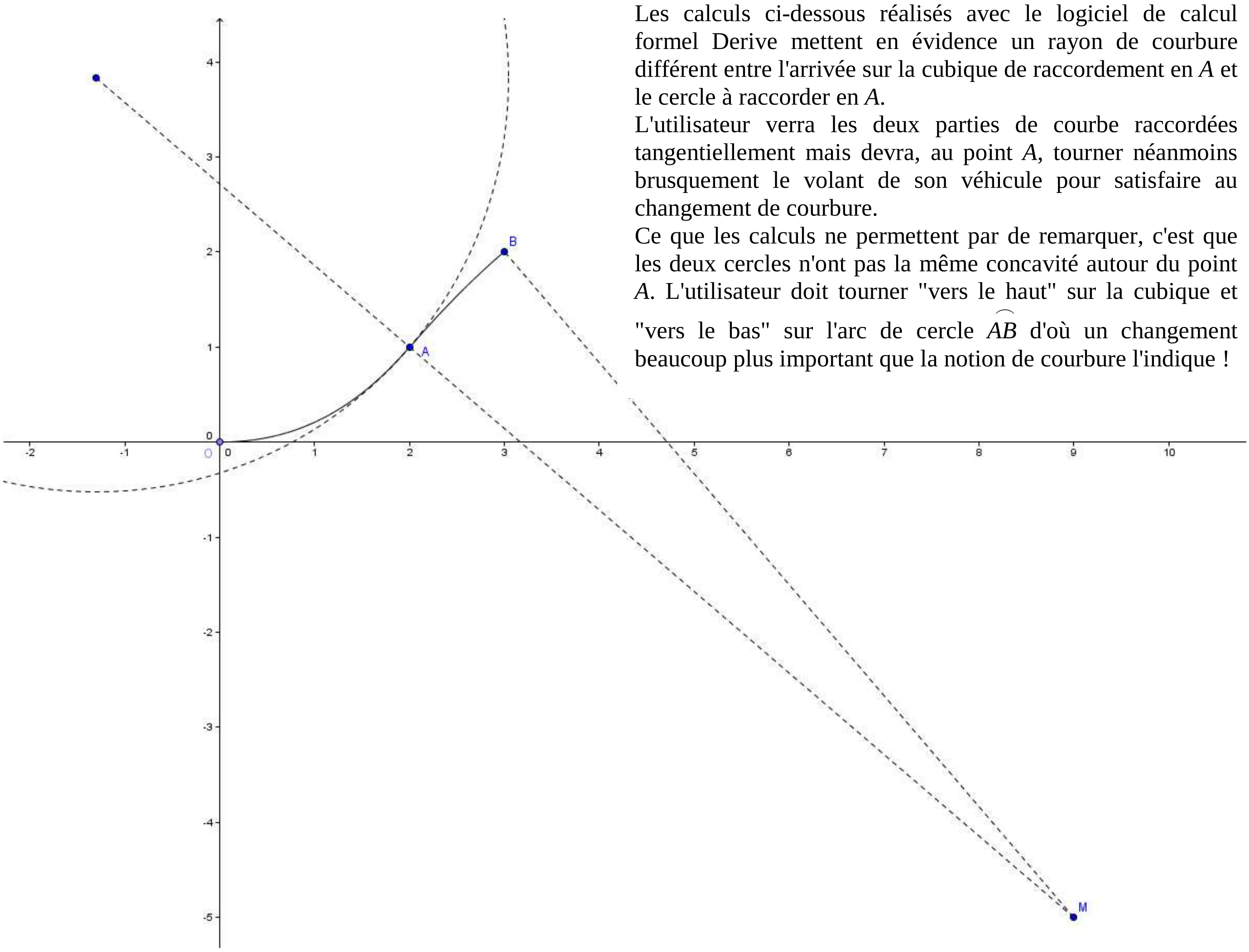
2) Le cas du cercle
a) Déterminer le cercle passant par O, A et dont la tangente en O soit l'axe des abscisses. Soit I le centre de ce cercle (C_1).
b) Les tangentes aux cercles (C_1) et (C) coïncident-elles ?
Un arc de cercle peut-il raccorder les deux voies ?

3) Le cas de la parabole
a) Déterminer la pente d'une droite perpendiculaire à $(A\Omega)$. Justifier.
b) Déterminer, si elle existe, la parabole *raccordant* les deux voies.

4) Le cas de la cubique, d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
a) Déterminer la cubique, si elle existe, *raccordant* les deux voies.
b) Déterminer l'équation réduite $y = mx + p$ de la tangente (T) en A au cercle (C).
En utilisant l'approximation affine de $f(x)$ au voisinage de $x = 2$, que dire de la forme affine $x \to mx + p$ trouvée précédemment ?
c) Plus difficile : De la même manière que dans le b), on cherche ici le cercle dont le tracé approche au mieux celui de la cubique au voisinage de A, c'est-à-dire le cercle osculateur à la cubique en A.
Soit à trouver, parmi toutes les équations de cercles, celles qui est la plus proche de l'équation de la cubique au voisinage de $x = x_A$ et $y = y_A$.
En injectant (ou substituant) l'équation de la cubique dans celle du cercle, déterminer le centre et le rayon du cercle trouvé. Vous pourrez utiliser ou vous aider dans les calculs et pour cela utiliser un logiciel de calcul formel (Xcas, Maxima, TI89) :

- Exprimer y en fonction de x
- Noter z la forme quadratique liée à l'équation du cercle que l'on recherche (on notera a, b et R les inconnues à déterminer).
- Substituer la valeur de y dans la forme z
- Effectuer le changement de variable $x = 2 + h$. On obtient un polynôme des variables h, a, b et R.
- Développer, réduire et ordonner suivant h.
- En vous inspirant de la constitution de la meilleure forme affine, déterminer les conditions successives permettant de trouver les valeurs de a, b et R.

Le cercle osculateur est-il le cercle de centre Ω contenant A et B ?
Que pensez-vous du raccordement par la cubique trouvé ? (Vous pourrez faire une recherche sur les mots *cercle osculateur*.)



Les calculs ci-dessous réalisés avec le logiciel de calcul formel Derive mettent en évidence un rayon de courbure différent entre l'arrivée sur la cubique de raccordement en *A* et le cercle à raccorder en *A*.

L'utilisateur verra les deux parties de courbe raccordées tangentiellement mais devra, au point *A*, tourner néanmoins brusquement le volant de son véhicule pour satisfaire au changement de courbure.

Ce que les calculs ne permettent par de remarquer, c'est que les deux cercles n'ont pas la même concavité autour du point *A*. L'utilisateur doit tourner "vers le haut" sur la cubique et "vers le bas" sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ d'où un changement beaucoup plus important que la notion de courbure l'indique !

$$y := \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{6}$$

$$z := y^2$$

$$\frac{x^4 \cdot (x+4)^2}{576}$$

$$u := x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 + z - 2 \cdot y \cdot b + b^2 - r^2$$

$$\frac{x^6 + 8 \cdot x^5 + 16 \cdot x^4 - 48 \cdot b \cdot x^3 + 192 \cdot x^2 \cdot (3 - b) - 1152 \cdot a \cdot x + 576 \cdot a^2 + 576 \cdot b^2 - 576 \cdot r^2}{576}$$

$$x := 2 + h$$

$$\frac{576 \cdot a^2 - 1152 \cdot a \cdot (h + 2) + 576 \cdot b^2 - 48 \cdot b \cdot (h + 6) \cdot (h + 2)^2 + h^6 + 20 \cdot h^5 + 156 \cdot h^4 + 608 \cdot h^3 + 1840 \cdot h^2 + 3648 \cdot h - 576 \cdot r^2 + 2880}{576}$$

$$\frac{h^6}{576} + \frac{5 \cdot h^5}{144} + \frac{13 \cdot h^4}{48} + \frac{h^3 \cdot (38 - 3 \cdot b)}{36} + \frac{5 \cdot h^2 \cdot (23 - 6 \cdot b)}{36} - \frac{h \cdot (6 \cdot a + 7 \cdot b - 19)}{3} + a^2 - 4 \cdot a + b^2 - 2 \cdot b - r^2 + 5$$

A l'instar de la meilleure forme affine, on recherche ici la meilleure forme quadratique (degré 2). Il faut donc nécessairement que $(23 - 6b) = 0$ et $(6a + 7b - 19 = 0)$ et $(a^2 - 4a + b^2 - 2b = r^2 + 5)$.

Le début de la résolution du système de ces trois conditions conduit à trouver $b = \frac{23}{6}$ qui ne correspond pas à l'ordonnée du centre du cercle que l'on doit raccorder. Les deux cercles et donc leurs courbures ne correspondent pas. Une cubique ne permet pas de raccorder avec une courbure coïncidant !