Devoir Terminale S

Vers une nouvelle fonction

Nous admettons qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $f(0) = 0$ et, pour tout x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1) Solution approchée

Déterminer une valeur approchée de $f(0,5)$ et $f(1)$.

Appliquer la méthode d'Euler pour construire à la main une représentation graphique de la fonction f sur $[0;1]$ en prenant un pas égal à 0,2.

Appliquer la même méthode en utilisant une calculatrice ou un tableur avec un pas de 0,1 puis de 0,05.

Donner alors une valeur approchée de $f(1)$ puis comparer ce résultat à π.

2) Parité

Montrer que la fonction $g : x \rightarrow f(x) + f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Calculer $g(0)$. En déduire que la fonction f est impaire.

3) Limite de f en $+\infty$.

a) Montrer que la fonction $h : x \rightarrow f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$, on ait $f(x) = c - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(*)$

c) A l'aide de $(*)$, prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$.

4) On considère la fonction u, définie sur $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$ par $u(x) = \tan x$.

a) Montrer que la fonction $\varphi : x \rightarrow f \circ u(x) - x$ est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.

b) Calculer $\varphi(0)$

En déduire que, pour tout x de $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$, on a $f(\tan x) = x$.

c) Calculer les valeurs exactes de $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ainsi que la valeur exacte de la constante c.

5) a) Etudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

b) A l'aide des renseignements précédents, tracer la courbe (C_f) (préciser les asymptotes et la tangente à l'origine).

Pour information

La fonction f du problème ci-dessus est la fonction arctangente ; cette appellation est justifiée par l'égalité $f(\tan x) = x$.

On obtient des valeurs approchées de $\arctan x$ à l'aide de l'une des touches de la calculatrice $\boxed{\tan^{-1}}$ ou $\boxed{\text{ATAN}}$ ou $\boxed{\text{INV}}\,\boxed{\text{TAN}}$.

La relation $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ reste la relation de base permettant d'obtenir des valeurs approchées de π, depuis la célèbre égalité de Leibniz (1673) : $\dfrac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \ldots$