Devoir Terminale S
La suite de Feigenbaum

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1 - x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement (k réel).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million.

L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0{,}3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1) Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie la relation $f(l) = l$.

2) Supposons $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.

a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

3) Supposons maintenant $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.

a) Etudier les variations de la fonction f sur $[0 ; 1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in [0;\frac{1}{2}]$

b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,

– montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$;

– établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

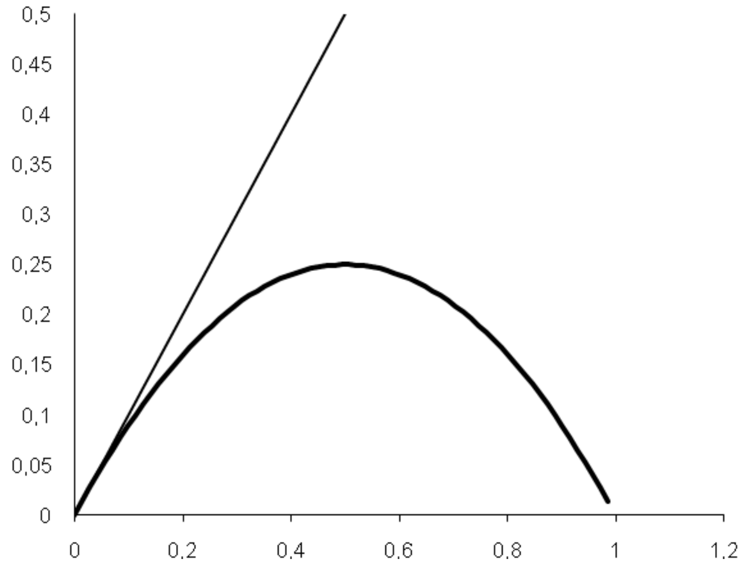
4) On a représenté sur la page ci-après la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.

a) Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, u_2,. . .

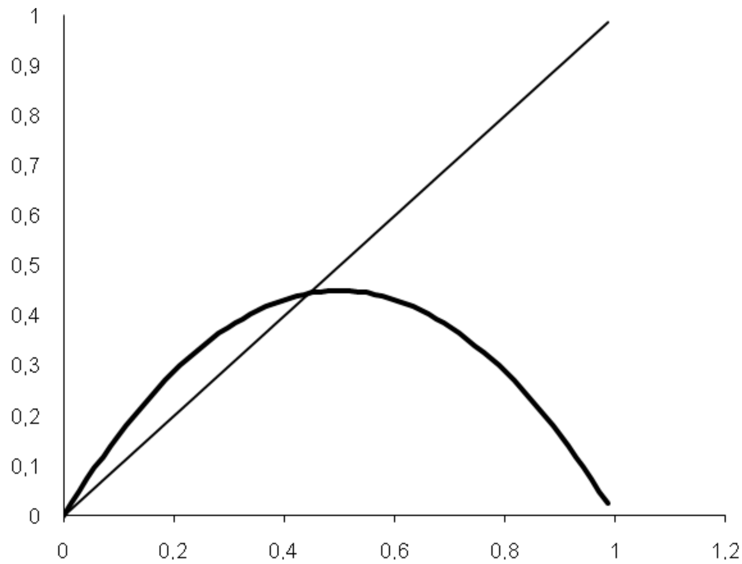
b) En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

Plus de renseignements sur ces suites au comportement chaotique de cette suite logistique sur :
http://www.ipnl.in2p3.fr/delphi/laktineh/monitorat/public_html/Feigenbaum/index.html
http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./f/feigenbaum.html
http://net.iut.univ-tours.fr/Geii/tpweb/geii/suite_num.htm

1er cas : $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.



2e cas : $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.



3e cas : $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.