Contrôle Terminale S

Exercice 1 (13 points)

Optimisation d'une aire

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie, pour tout x de [-2;2], par $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ; on prendra comme unité graphique 2 centimètres.

1) Intervalle d'étude

Expliquer pourquoi on peut limiter l'étude de f à l'intervalle [0;2].

2) Dérivabilité de f.

a) Etudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle [0;2[et calculer sa dérivée f'.

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur [0;2].

3) Représentation graphique de f

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Justifier que, pour tout x de [0;2], $f(x) \leqslant 2x$.

En déduire la position de (C) par rapport à (T), sur [0;2].

c) Tracer (C) et (T).

4) Solution de (E) : $f(x) = 1$.

a) Question de cours

g est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

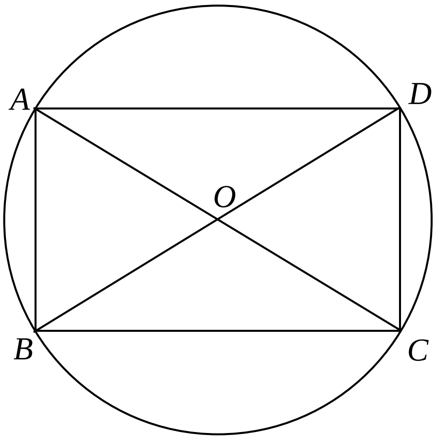
Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que, pour tout réel k compris entre $g(a)$ et $g(b)$, l'équation $g(x) = k$ admet au moins une solution c dans $[a;b]$.

Démontrer que si, de plus, g est strictement croissante sur $[a;b]$, alors il y a unicité de cette solution.

b) Prouver que l'équation (E) admet exactement deux solutions dans l'intervalle [-2;2].

Donner un encadrement de ces réels à 10^{-3} près.

Partie B : Etude d'une aire



Soit (Γ) un cercle de rayon $r = 1$ et $ABCD$ un rectangle inscrit dans (Γ). On pose $AB = x$ et on associe, à ce réel x, l'aire $A(x)$ du rectangle $ABCD$.

1) Préciser quel intervalle J peut décrire le réel x et calculer $A(x)$.

2) Déterminer, à l'aide des résultats de la partie A :

a) Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $ABCD$ est maximale ; préciser dans ce cas, la valeur de l'aire et la nature de $ABCD$.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire du rectangle $ABCD$ est égale à 1.

Exercice 2 (7 points)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)]$

b) En déduire l'existence d'un asymptote oblique Δ à la courbe représentative C de f en $+\infty$.

c) Etudier la position relative de C et de Δ.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Prouver qu'il existe un réel a tel que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ puis que $x \to f(x) - ax$ a une limite finie b en $-\infty$.

3) a) En utilisant votre calculatrice graphique, la courbe semble-t-elle admettre un axe ou un centre de symétrie ?

Si oui, le démontrer

b) Comment retrouver les résultats du 2) plus rapidement ?