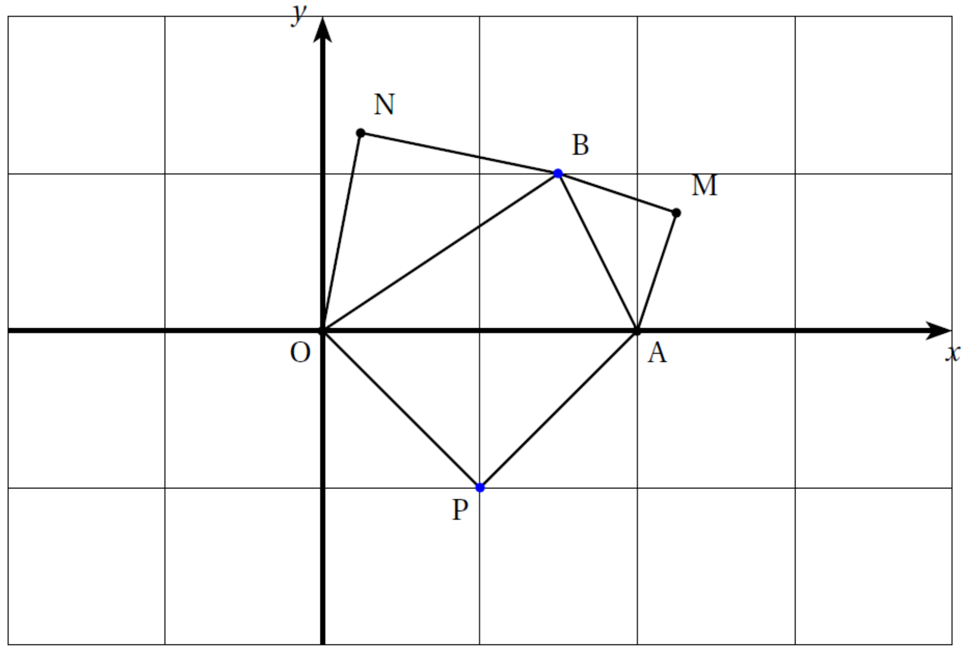
Contrôle TS$_2$ spécialité

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + \mathrm{i}$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.
On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N.
On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1) À l'aide des transformations
   a) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
   b) Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
   c) Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   d) Quelle est l'image du point O par r ?
   e) En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2) En utilisant les nombres complexes
   a) Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1) a).
   b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.
   c) Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Exercice 2

Dans cet exercice, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connus les résultats suivants :
– La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
– la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
– une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que $s(A) = s'(A)$, $s(B)= s'(B)$ et $s(C) = s'(C)$.

Montrer que $s = s'$.