Contrôle TS$_2$

Exercice 1 (7 points)

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit *ABCDEFGH* tel que :

$AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.

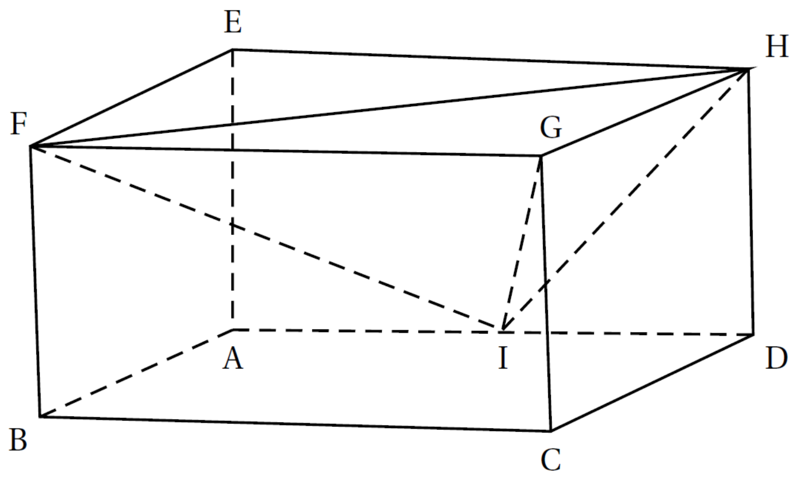
On appelle I le milieu de $[AD]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{AE})$

1) Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2) a) Montrer que le volume V du tétraèdre *GFIH* est égal à $\frac{1}{3}$.

b) Montrer que le triangle *FIH* est rectangle en I.
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (*FIH*).



3) Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (*FIH*).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (*FIH*).

c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (*FIH*).

4) a) La droite (*AG*) est-elle perpendiculaire au plan (*FIH*) ?

b) Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c) Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (*AG*) et de (*FIH*).

5) *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre G passant par K.

Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (*FIH*) ?

(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

Exercice 2 (6 points)
Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left((\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

On note I son centre et J le milieu de $[AI]$.
1) C est le barycentre des points pondérés (A,m), $(B, 1)$ et $(D, 1)$ lorsque :
a) $m = -2$ b) $m = 2$ c) $m = -1$ d) $m = 3$

2) a) B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.

c) Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d) J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3) L'ensemble des points M du plan tels que $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \| = AB$ est :
a) la médiatrice de $[AC]$.
b) le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
c) la médiatrice de $[AI]$.
d) le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

4) L'ensemble des points M du plan tels que $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$ est :
a) la médiatrice de $[AC]$.
b) le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
c) la médiatrice de $[AI]$.
d) le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

Exercice 3 (7 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1) Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$.
Interpréter graphiquement cette limite.
b) Préciser les positions relatives de (C) et de Γ.
3) On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.
a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - a f'(a) = 0$.
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x f'(x)$.
b) Montrer que sur $]1\,;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.
La courbe (C) et la courbe Γ sont données en annexe.
Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

NOM : ……………………..   PRENOM : ………………

Exercice 3
Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur