# Epreuve de Mathématiques
# Terminale S

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

**Exercice 1** **5 points**

*Commun à tous les candidats*

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

On note $R_1$ (respectivement $N_1$) l'évènement « on a obtenu une case rouge (respectivement noire) avec la roue A ».
On note $R_2$ (respectivement $N_2$) l'évènement « on a obtenu une case rouge (respectivement noire) avec la roue B ».

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Soient E et F les évènements :
   E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
   F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
   Montrer que $p$(E)= 0,02 et $p$(F) = 0,17.
3) Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien. $X$ désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).
   a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.
   b) Calculer l'espérance mathématique de $X$ et en donner une interprétation.
4) Le joueur décide de jouer $n$ parties consécutives et indépendantes ($n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)
   a) Démontrer que la probabilité $p_n$ qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que
   $p_n = 1-(0,9)^n$ .
   c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier $n$ pour laquelle $p_n > 0,9$ ?

**Exercice 2** **5 points**

*Commun à tous les candidats*

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque erreur enlève 0,5, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.
Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

1) L'équation $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 0 solution | b) 1solution | c) 2 solutions | d) plus de 2 solutions |

2) L'expression $-e^{-x}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) n'est jamais négative | b) est toujours négative | c) n'est négative que si $x$ est positif | d) n'est négative que si $x$ est négatif |

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{x} - 1}{e^{x} + 2} =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $-\dfrac{1}{2}$ | b) 1 | c) 2 | d) $+\infty$ |

4) L'ensemble des solutions de l'inéquation $(e^{x} - 1)(1 - x) \geqslant 0$ est

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $]-\infty ; 1]$ | b) $[0 ; 1]$ | c) $[0 ; +\infty[$ | d) $]-1 ; 0] \cup [1 ; +\infty[$ |

5) $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \lambda \end{cases}$

$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) tout réel $\lambda$ | b) $\lambda = 1$ | c) $\lambda = \dfrac{1}{2}$ | d) $\lambda = 2$ |

**Exercice 3** **5 points**

*Commun à tous les candidats*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1cm.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle que : " Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe $z$, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u} ; \vec{w})$"

Soient $M$, $N$ et $P$ trois points du plan, d'affixes respectives $m$, $n$ et $p$ tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

1) Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p - m}{n - m}\right) = (\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{MP})$

2) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p - m}{n - m}\right|$

Partie B

1) On considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives

$z_A = 4 + \mathrm{i}$, $z_B = 1 + \mathrm{i}$, $z_C = 5\mathrm{i}$ et $z_D = -3 - \mathrm{i}$.

Placer ces points sur une figure.

2) Soit $f$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$z' = (1 + 2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i}$.

a) Préciser les images des points $A$ et $B$ par $f$ .

b) Montrer que $f$ admet un unique point invariant $\Omega$, dont on précisera l'affixe $\omega$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z$, on a :

$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z)$.

b) En déduire, pour tout point $M$ différent du point $\Omega$, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}\ ; \overrightarrow{MM'})$

c) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$ ?

d) Soit $E$ le point d'affixe $z_E = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire $z_E$ sous forme exponentielle puis placer le point $E$ sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point $E'$ associé au point $E$.

**Exercice 4** **5 points**

*Pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques*

Partie A Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' + y = x\mathrm{e}^x$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$, où $y$ désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation (1).

b) Montrer que $v$ est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui prend la valeur $\dfrac{1}{4}$ en $x = 0$.

Partie B Étude d'une fonction

1) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{2x} - 2$.

Déterminer la limite de $g$ en $-\infty$ et la limite de $g$ en $+\infty$.

2) Étudier le sens de variation de $g$ , puis dresser son tableau de variations.

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution réelle.

b) Cette solution est appelée $\alpha$.

Montrer que $0{,}18 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}19$.*

4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.

5) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^x$$

a) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ et la limite de $f$ en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

(On pourra mettre $\mathrm{e}^{-x}$ en facteur)

Etudier le sens de variation de $f$

**Exercice 4** **5 points**

*Pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques*

1) On considère l'équation

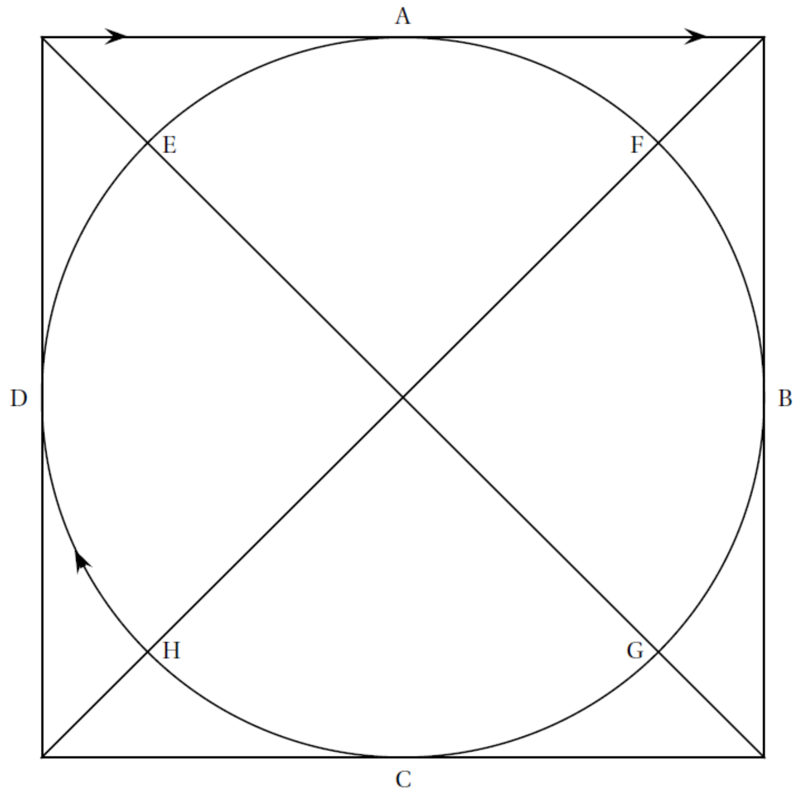
$$(E) : 17x - 24y = 9,$$

où $(x, y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a) Vérifier que le couple $(9 ; 6)$ est solution de l'équation (E ).

b) Résoudre l'équation (E ).

2) Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma ci-dessous. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.




Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a) On suppose qu'à un certain instant $t$ Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.
À l'instant $t$ , on note $y$ le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et $x$ le nombre de tours effectués par le pompon.
Montrer que $(x, y)$ est solution de l'équation (E ) de la question 1.

b) Jean a payé pour 2minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon?

c) Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d) Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?