Des applications du raisonnement par récurrence

A) Dérivée de $x \to x^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$
   Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que $f'(x) = nx^{n-1}$
2) Considérons maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
   Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g(x) = x^{-n}$ et $g'(x) = -nx^{-n-1}$
3) Justifier alors le théorème : Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, Si $f(x) = x^n$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$.
   Utiliser ce théorème pour calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a) $x \to x^{-3}$ b) $x \to \dfrac{1}{x^5}$ c) $x \to -\dfrac{2}{x^4}$

B) Etude des propriétés d'une suite

Soit la suite récurrente définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1) Démontrer par récurrence que la suite est majorée par 3.
2) Vérifier que $u_0 < u_1$.
   Démontrer que si $u_n < u_{n+1}$ alors $u_{n+1} < u_{n+2}$
   Ce qui précède permet-il d'affirmer que la suite (u_n) est strictement croissante ?

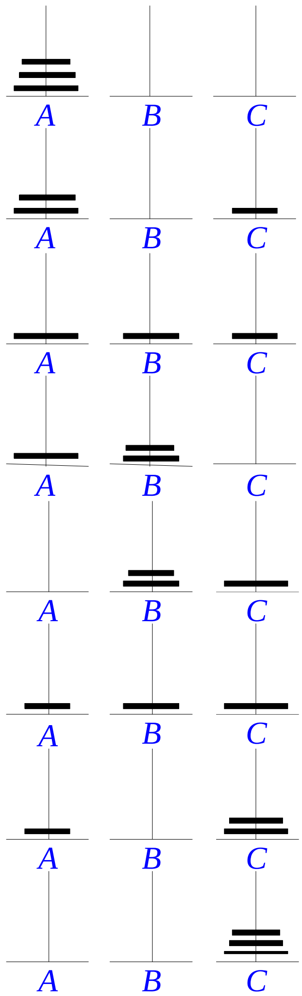
C) Jeu des tours de Hanoï

On considère trois lignes verticales A, B et C. Le jeu consiste à amener sur la tige C les disques empilés sur la tige A. Pour cela, on utilise la tige B comme intermédiaire en respectant les règles suivantes :

- On ne déplace qu'un disque à la fois
- Tout disque doit être au-dessus d'un disque de diamètre supérieur.

1) Soit d_n le nombre minimal de déplacements, n désignant le nombre de disques.
   Prouver que la suite (d_n) est définie par $d_1 = 1$ et $d_{n+1} = 2d_n + 1$
2) Calculer d_2, d_3, d_4 et d_5
3) Conjecturer une expression de d_n en fonction de n.
   La démontrer par récurrence.

Cas du déplacement de trois disques de la tige A à la tige C.



D) Une autre suite

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 2^{n+1}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2) Conjecturer une relation entre u_n et 2^n, vraie pour tout entier naturel n.
   Démontrer cette relation par récurrence.