Devoir terminale S

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm).

1) a) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

b) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

c) Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure.
Montrer que $MNPQ$ est un carré.

2) Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la figure.
Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.

3) On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

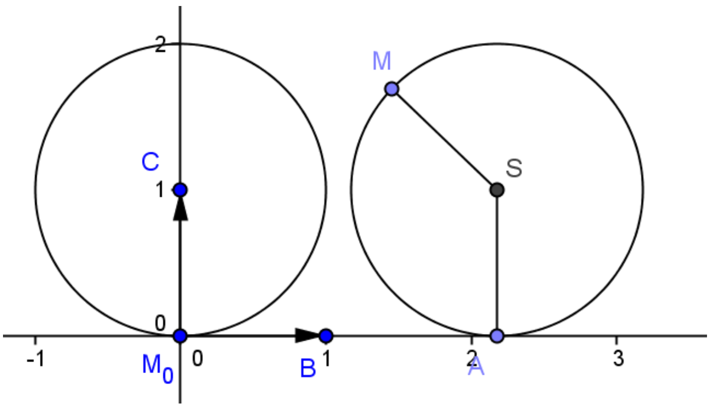
a) Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

b) Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de α.

c) Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

d) Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 2 La roue du vélo



On considère un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ tel que le rayon de la roue soit égal à l'unité de longueur et l'axe $(O; \vec{u})$ figure le sol. B est le point de coordonnées (1;0).
Le point de contact de la roue du vélo avec le sol est noté A, repéré par le réel t, t décrivant $[0;2\pi]$.
Pour $t = 0$, $M = M_0$ est en O.
S désigne le centre de la roue du vélo.

1) Etablir que les affixes de A, B et S sont respectivement t, 1 et t + i.

2) Expliquer pourquoi l'angle $(\overrightarrow{SA} ; \overrightarrow{SM}) = -t$ en radians.

3) En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{SM}$ en fonction de t, puis établir que l'affixe de $\overrightarrow{BM}$ est
$Z = (t - 1) + (1 - e^{-it})\text{i}$.

4) a) Exprimer $e^{it} + e^{-it}$ et $e^{it} - e^{-it}$ en fonction de $\cos t$ ou $\sin t$.

b) Calculer $BM^2 = Z.\overline{Z}$ en fonction de t.

5) On pose $f(t) = (t - 1)^2 - 2(t - 1)\sin t + 2(1 - \cos t)$.
Démontrer que $f'(t) = 2(t - 1)(1 - \cos t)$.

6) Dresser le tableau de variations de f sur $[0;2\pi]$ et en déduire la position où M est au plus près de B.