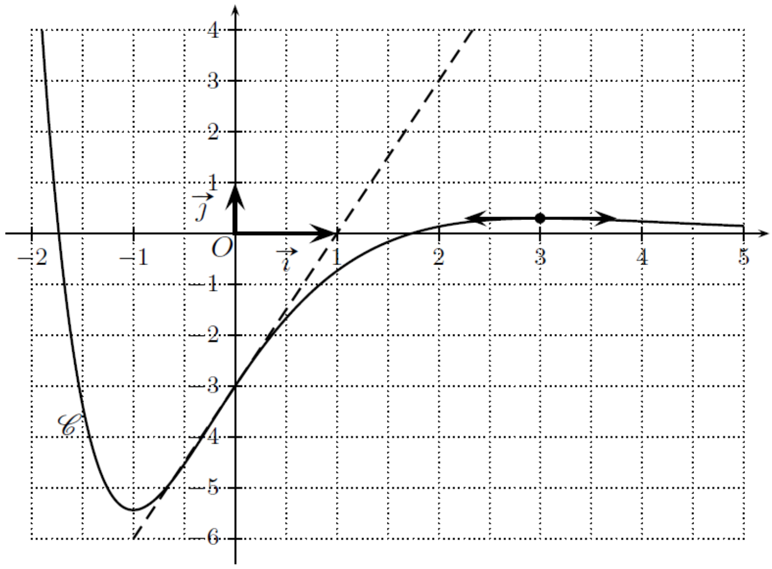
Contrôle Terminale ES$_2$

Exercice 1

Partie A



Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe représentative, notée C, ci-dessous.

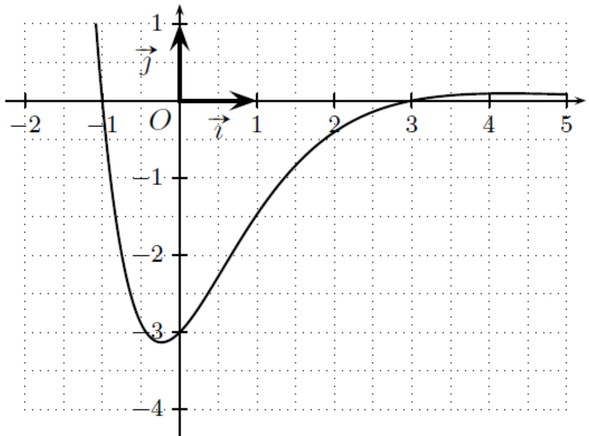
1) Lire sur le graphique $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.

2) Parmi les quatre courbes données ci-contre se trouve celle de la fonction f', fonction dérivée de f. La retrouver en donnant un argument validant votre réponse.

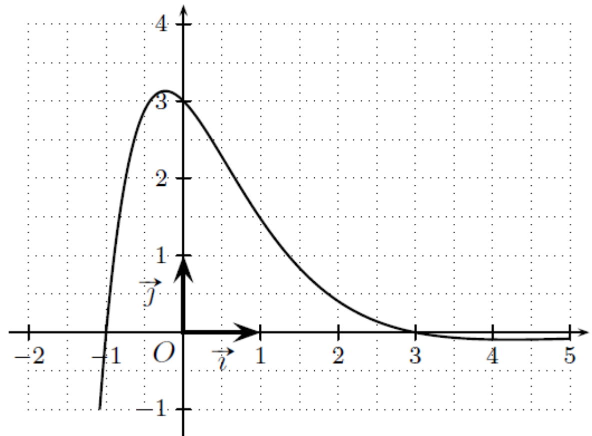
3) On admet que la fonction f est définie par $f(x) = (x^2 + a)e^{bx}$ où a et b sont deux réels.

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.

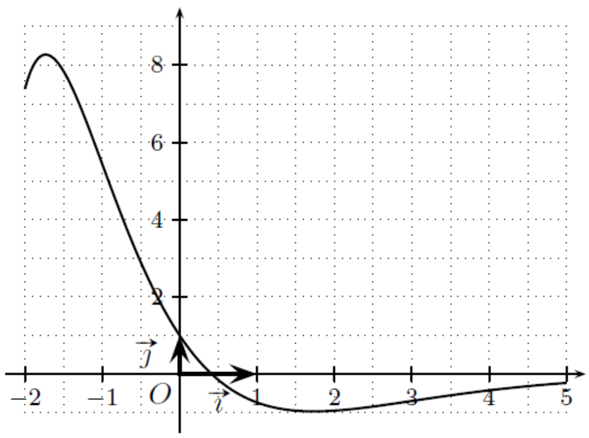
b) A l'aide des valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ obtenues à la question 1, calculer a et b.



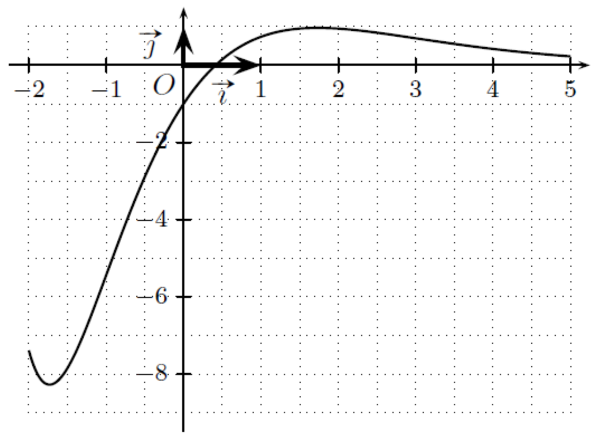
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2) En remarquant que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{3}{e^x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Justifier que le signe de $f'(x)$ est donné par celui de $(-x^2 + 2x + 3)$.

4) Résoudre algébriquement l'équation $-x^2 + 2x + 3 = 0$ puis dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de $(-x^2 + 2x + 3)$.

5) Etudier soigneusement les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.

6) L'étude des variations de f réalisée dans la question 5 permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle notée α.

a) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

b) Prouver que le réel α est également solution de l'équation $\ln\left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = x$.

Exercice 2 (BAC 2008)
Historiquement, on avait décidé de numéroter les planètes du système solaire suivant leur distance moyenne au Soleil. Ainsi, on notait :

Mercure = 1
Vénus = 2
Terre = 3
Mars = 4
Céres = 5
Jupiter = 6
Saturne = 7
Uranus = 8

On considère la série statistique double $(i;d_i)_{1 \leqslant i \leqslant 8}$, où i représente le numéro d'ordre de la planète et d_i sa distance au soleil (en millions de km) :
(1 ; 57,94), (2 ; 108,27), (3 ; 149,60), (4 ; 228,06), (5 ; 396,44), (6 ; 778,73), (7 ; 1 427,7), (8 ; 2 872,4).

1) Indiquer, à l'aide d'une phrase, la signification du couple (3 ; 149,60).

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

2) Compléter, en reproduisant, le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1427,7	2872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$y_i = \ln(d_i - d_1)$				5,137				

a) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement (D), de la série $(i;y_i)$, avec i compris entre 2 et 8.
b) Construire le nuage de points $(i;y_i)$, avec i compris entre 2 et 8, et la droite (D) dans un repère orthonormal, unités : 2 cm.
4) a) Déduire de ce qui précède que l'on peut modéliser l'expression de d_i, en fonction de i, avec i compris entre 2 et 8, sous la forme $d_i = 57{,}94 + 12{,}16 \times 1{,}966^i$.
b) Calculer la distance moyenne probable au soleil d'une planète numérotée 9.

(*Ce résultat est connu sous le nom de loi de Titius-Bode du nom de deux astronomes allemands qui permirent la découverte de Neptune n°9 en 1848... La loi tomba ensuite en désuétude mais l'ajustement étudié demeure excellent si l'on inclut « Pluton »... La planète naine en n°10*).

Exercice 3 Facultatif (extrait du concours Accès 2008)
Chaque question comporte quatre propositions, notées A. B. C. D.. Pour chaque proposition, vous devez signaler si elle est vraie ou fausse en l'indiquant sur votre copie par la lettre V ou la lettre F. Une réponse est donc une suite de quatre V ou F.
L'absence de marque (V,F) ou la mauvaise marque à une proposition n'entraîne pas de points négatifs.

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$ et g la fonction définie par : $g(x) = -e^x(e^x + x + 2)$.

A. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
B. La fonction dérivée f' et la fonction g ont même signe.
C. L'équation $\dfrac{1+x}{1+e^x} = x$ admet une solution unique α sur $[0;+\infty[$ avec $0 < \alpha < 1$.
D. La droite D d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe représentative de f quand x tend vers $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ où ln désigne le logarithme népérien.
A. L'ensemble de définition de la fonction f est $[0;+\infty[$.
B. Pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f, on a : $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.
C. La fonction f atteint son maximum pour $x = -\ln 2$
D. La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse nulle a pour équation $y = x$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ représenté ci-dessous. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées ; il a pour équation $x + z = 2$.

1) On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives :

$A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$ et $C(0;0;6)$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tracer le triangle ABC. On note (P) le plan défini par les points A, B et C.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c) Montrer que les points A, B et C définissent bien le plan (P).
d) Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2) On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières. Le point G est situé sur l'axe $(O\ ;\ \vec{j})$, le point E dans le plan $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ et le point F dans le plan $(O\ ;\ \vec{j}, \vec{k})$.

Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle au plan $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{k})$.
a) Donner l'équation du plan (Q).
b) Donner les coordonnées des points G, E et F.
c) Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?
d) Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient $\begin{cases} y = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$?
e) Représenter cet ensemble dans votre repère.

3) On considère le système S de 3 équations à 3 inconnues x, y, z : $\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$

Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont les solutions du système S ?