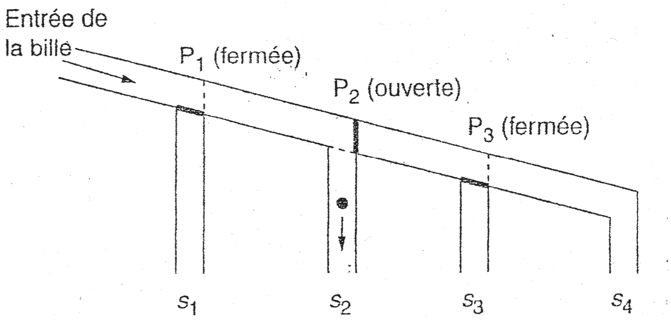
Contrôle TES

Exercice 1 (7 points)
Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1, P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles s_1, s_2, s_3 et s_4.
Un système électronique positionne aléatoirement ces trois portes puis libère la bille.



NB : sur le schéma, les portes P_1 et P_3 sont fermées, la porte P_2 est ouverte, la bille sortira par s_2.
1) Énumérer dans un tableau comme ci-dessous, en s'aidant éventuellement d'un arbre de choix, toutes les positions simultanées possibles des trois portes et indiquer la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations.

P_1	P_2	P_3	Sortie
...	...	...	...
F	O	F	s_2
...	...	...	...

(Par convention, on notera F une porte fermée et O une porte ouverte).

2) On suppose que les huit événements élémentaires, trouvés à la question 1, sont équiprobables.
a) Soit A l'événement (F ; O ; F). Quelle est la probabilité $p(A)$ de l'événement A ?
b) Soit
S_1 l'événement « la bille sort par s_1 » ;
S_2 l'événement « la bille sort par s_2 » ;
S_3 l'événement « la bille sort par s_3 » ;
S_4 l'événement « la bille sort par s_4 ».
Calculer les probabilités $p(S_1)$, $p(S_2)$, $p(S_3)$ et $p(S_4)$ de chacun de ces événements.

3) Pour jouer, on doit miser 7 euros.
Si la bille sort par s_1, on ne reçoit rien.
Si la bille sort par s_2, on reçoit 5 euros.
Si la bille sort par s_3, on reçoit 10 euros.
Si la bille sort par s_4, on reçoit 20 euros.
On appelle X le gain, ou la perte, en euros du joueur (en tenant compte de la mise des 7 euros ; par exemple, à la sortie s_4, X est égal à 13).
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.
4) On veut modifier la mise afin que le jeu soit équitable (entre les mises et les gains moyens).
Déterminer cette nouvelle mise en justifiant la réponse.

Exercice 2 (6 points)
Dans une grande ville de France, le 1er octobre, pour cause de pollution, la circulation est interdite aux véhicules non prioritaires portant un numéro d'immatriculation pair.

On sait que 10 % des véhicules circulant ce jour-là sont prioritaires. En outre, $\frac{1}{5}$ de ceux qui circulent sans être classés prioritaires ont un numéro pair et $\frac{4}{5}$ un numéro impair.

1) Un agent arrête au hasard un véhicule circulant ce jour-là dans cette ville.
On note :
A l'événement « le véhicule arrêté est prioritaire »
I l'événement « le véhicule arrêté porte un numéro impair »

Donner $p(A)$ puis interpréter les autres données en termes de probabilités conditionnelles.

2) On note B l'événement « le véhicule arrêté n'est pas prioritaire et a un numéro impair » et
C l'événement « le véhicule arrêté n'est pas prioritaire et a un numéro pair ».
Calculer $p(B)$ et $p(C)$.

3) Ce jour là, un véhicule circulant dans cette ville peut être considéré en infraction à cause de son numéro d'immatriculation ou pour les raisons habituelles.
Il a été établi qu'un véhicule prioritaire est en infraction 1 fois sur 20 et qu'un véhicule non prioritaire qui porte un numéro impair l'est 1 fois sur 15.
Un véhicule non prioritaire qui porte un numéro pair est donc toujours en infraction.

On note V l'événement « le véhicule arrêté par l'agent est en infraction ».

a) Montrer que la probabilité pour que le véhicule arrêté soit en infraction et prioritaire est de 0,005. (On pourra s'aider d'un arbre pondéré).
b) Calculer de même $p(B \cap V)$ et $p(C \cap V)$.
c) En déduire $p(V)$.

Exercice 3 (7 points)
On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,4u_n + 4,8$ pour tout entier naturel n.
1) Tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,4x + 4,8$ dans un repère orthonormal d'unités 1 cm.
Utiliser ces droites d'équations pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n).
Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

2) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 8$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4.
Exprimer alors v_n, en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

3) Une revue spécialisée est diffusée à 12 000 exemplaires soit par abonnement soit par vente en librairie. Au 1er janvier 2007, 2 000 personnes sont abonnées à cette revue. Une étude statistique a permis de constater que d'une année sur l'autre, 80% des abonnés renouvellent leur abonnement et 40% des acheteurs non abonnés de la revue souscrivent un abonnement.
Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à la revue, exprimé en milliers, n années après le 1er janvier 2007. On a donc $u_0 = 2$.
On suppose que le nombre d'abonnés à la revue évolue de la même façon les années suivantes.

À partir de quelle année le nombre d'abonnés sera supérieur à 7 900.
Est-il possible pour la direction de la revue d'envisager un nombre d'abonnés supérieur à 8 000 ?