Contrôle TES2

Exercice 1

Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la Mairie (M), le Centre commercial (C), la Bibliothèque (B), la Piscine (P) et le Lycée (L).

Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-contre donne les rues existant entre ces lieux.

	B	C	L	M	P
B		X		X	X
C	X		X	X	
L		X		X	
M	X	X	X		X
P	X			X	

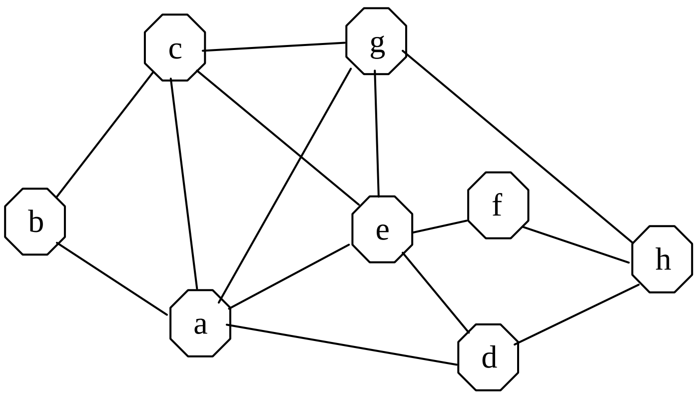
1) Dessiner un graphe représentant cette situation.

2) Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier. Proposer un tel trajet.

Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

Exercice 2

On donne G le graphe représenté ci-dessous et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée.



$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 6 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Dites, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1) L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets

2) Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.

3) Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.

4) Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.

5) Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Exercice 3

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation :

$x^2 - 4x - 5 = 0$

2) En déduire la résolution, dans l'ensemble des nombres réels, des équations suivantes :

a) $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$

b) $\ln(x - 3) + \ln(x - 1) = 3\ln 2$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = 2 - x + \ln x$

où ln désigne le logarithme népérien.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ en remarquant que

$$f(x) = x\left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}\right)$$

2) a) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 0.

b) En déduire que la courbe C admet une asymptote que l'on précisera.

3) Calculer la dérivée $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer une équation de la tangente T à C en son point d'abscisse 2.

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule sur l'intervalle $[3 ; 4]$.

6) Tracer T et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 5

Dans chaque cas, calculer le plus petit entier naturel n tel que :

1) $(1{,}25)^n \geq 60$

2) $\left(\frac{19}{20}\right)^n \leq \frac{1}{4}$