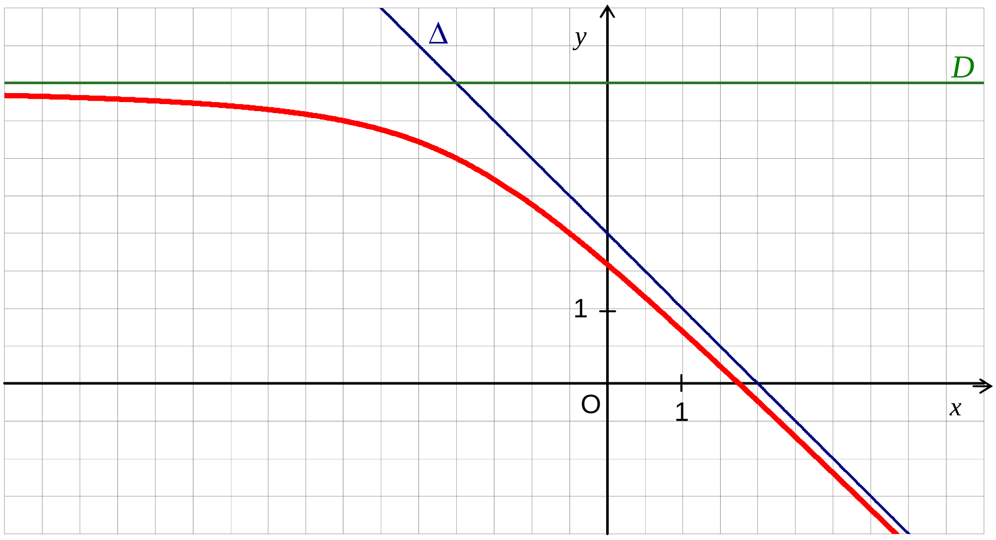
Contrôle Terminale ES2

Exercice 1

La courbe ci-dessous est la courbe représentative notée C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Les droites D et Δ sont les asymptotes à C_f respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.



À partir du graphique et des renseignements fournis :

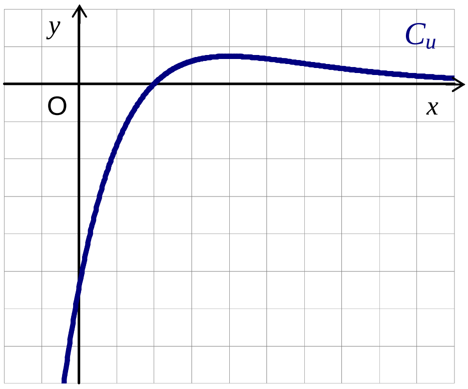
Donner une équation des droites Δ et D.

Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?

Quelle est la limite en $+\infty$ de $f(x) + x - 2$?

Exercice 2

La courbe (C_u), ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé du plan, telle que $u(1) = 0$.



À partir du graphique et des renseignements fournis :

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 1}{x - 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
En déduire d'éventuelles asymptotes horizontale ou verticale à C.

2) Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\text{si } x \neq 1,\ f(x) = -x + 4 + \frac{3}{x - 1}.$$

Déduire de cette écriture l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Etudier la position relative de C par rapport à son asymptote oblique.

4) Tracer les asymptotes à C dans un repère orthonormé d'unités 0,5 cm, puis tracer C.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère.

1) Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) On note f' la dérivée de la fonction f.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau des variations de f. (*Faire figurer les limites obtenues, ainsi que les valeurs arrondies au dixième des extremums de f obtenues à l'aide de la calculatrice*.)

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 7$, admet une solution unique α.

b) Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de α au centième près.

Exercice 5

En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants.

L'économiste anglais Malthus avait émis l'hypothèse suivante:

- La population de l'Angleterre suit une progression géométrique en augmentation de 2% par an.
- En 1800, l'agriculture anglaise permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 500 000 habitants supplémentaires par an, suivant une progression arithmétique.

nb : *Le terme "progression" était autrefois employé à la place du mot actuel de "suite".*

Afin de modéliser l'hypothèse de Malthus, nous numéroterons les années successives en prenant comme rang 0 l'année 1800. Nous noterons p_n la population de l'Angleterre et a_n la population que l'agriculture anglaise peut nourrir en l'an 1800 + n.

Ainsi, nous avons $p_0 = 8\,000\,000$ et $a_0 = 10\,000\,000$.

1) Calculer p_1 , p_2 et p_3 .

Pour tout entier naturel n, donner la formule de récurrence exprimant le passage de p_n à p_{n+1} ainsi que la formule exprimant p_n en fonction de n.

2) Calculer a_1, a_2 et a_3 .

Pour tout entier naturel n, donner la formule de récurrence exprimant le passage de a_n à a_{n+1} ainsi que la formule exprimant a_n en fonction de n.

3) Calculer, selon l'hypothèse de Malthus, la population de l'Angleterre en 1900 ainsi que le nombre de personnes que peut nourrir l'agriculture anglaise en 1900.

4) Déterminer, selon l'hypothèse de Malthus, l'année à partir de laquelle l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6

Donner la définition d'une fonction continue sur un intervalle.