Les Probabilités

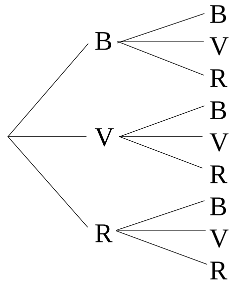
I) <u>Le vocabulaire des probabilités</u>

1) <u>Exemple</u>

Une urne contient 3 boules : une bleue, une rouge, une verte. On tire au hasard une boule de cette urne, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne que l'on agite. On tire alors une deuxième boule de l'urne en notant sa couleur.

On dit que l'ensemble des opérations ainsi réalisées constitue une **épreuve** ou **expérience aléatoire**. On peut représenter l'ensemble des résultats possibles ou **éventualités** par un tableau ou un arbre :

1 **2**	**B**	**V**	**R**
B	(B,B)	(V,B)	(R,B)
V	(B,V)	(V,V)	(R,V)
R	(B,R)	(V,R)	(R,R)



2) <u>Evénement</u>

Considérons Ω = {(B,B);(B,V);(B,R);(V,B);(V,V);(V,R);(R,B);(R,V);(R,R)} l'**univers** ou **ensemble des éventualités** de cette expérience.

L'événement A_1 = {(B,B);(V,V);(R,R)} est l'événement "Obtenir 2 boules de même couleur"
A_2 = {(B,R);(B,V);(B,B)} est l'événement "Obtenir une boule bleue au premier tirage"

<u>Remarque</u>

Si une épreuve donne comme résultat (B,R), nous pouvons dire que l'événement A_2 est réalisé mais par contre A_1 ne l'est pas.

3) <u>Evénement élémentaire</u>

A_3 = {(B,B)} est l'événement "obtenir deux boules bleues".

C'est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité. On dit que c'est un **événement élémentaire**.

4) <u>Evénement "A et B"</u>

Considérons les événements A_1, A_2 et A_3 précédemment définis :

A_1 : "Obtenir 2 boules de même couleur"
A_2 : "Obtenir une boule bleue au premier tirage"
A_3 : "obtenir deux boules bleues".

Une épreuve étant accomplie, nous disons que l'événement A_3 est réalisé lorsque les événements A_1 et A_2 sont simultanément réalisés.

L'événement A_3 est l'événement "A_1 et A_2", noté A_1 et A_2 mais aussi $A_1 \cap A_2$.

$A_3 = A_1$ et A_2 = {(B,B)}

5) <u>Evénement incompatible</u>

Reprenons l'événement A_2 : "Obtenir une boule bleue au premier tirage" et soit A_4 = {(R,R)} : "obtenir deux boules rouges".

Aucune éventualité ne réalise simultanément A_2 et A_4; on dit que A_2 et A_4 sont incompatibles et on note $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

<u>Remarque</u>

Les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles

7) <u>Evénements contraires</u>

Soit A_1 : "Obtenir 2 boules de même couleur".

On note $\overline{A_1}$ l'événement contraire, c'est-à-dire "obtenir un tirage bicolore".

On a A_1 = {(B,B);(V,V);(R,R)} et donc $\overline{A_1}$ = {(B,V);(B,R);(V,B);(V,R);(R,B);(R,V)}

Ainsi, si une épreuve est accomplie, l'un et l'un seulement des deux événements A_1 et $\overline{A_1}$ est réalisé.

II) Probabilité

1) La notion de probabilité

Considérons l'épreuve suivante : elle consiste à lancer un dé ; l'univers associé est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. Notons $\{\omega_i\}$ l'événement élémentaire "obtenir le chiffre i", $1 \leq i \leq 6$

4 séries d'épreuves comportant 1 000, 5 000, 10 000 et 20 000 lancers ont été résumées pour l'apparition du chiffre 1 par le tableau ci-contre :

Nombre de lancers	**Nombre d'apparitions du chiffre 1**	**Fréquence**
1 000	173	0,1730
5 000	844	0,1688
10 000	1 650	0,1650
20 000	3 320	0,1660

On remarque que les résultats sont très proches. On supposera, comme en physique, que l'on admet "une valeur exacte" (ou théorique) de la mesure.

Nous admettrons que la fréquence de $\{\omega_i\}$ est une valeur approchée d'un nombre réel compris entre 0 et 1 que l'on appelle la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ que l'on note $p(\{\omega_i\})$. Dans le cas présent, on supposera $p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$.

Définition

Soit E une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

- A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est associé un nombre réel, **élément de [0;1]** appelé probabilité de l'événement élémentaire (représentation idéale de la fréquence) tel que : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$
- La probabilité de tout événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

En particulier, $p(\Omega) = 1$.

- Si $A = \varnothing$ alors $p(A) = 0$

2) L'hypothèse d'équiprobabilité

Supposons que tous les événements élémentaires soient tels que $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = ... = p(\{\omega_n\})$. On dit alors qu'ils sont équiprobables. L'égalité $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$ entraîne $p(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$

Les mots "au hasard", "indiscernable au toucher", "bien équilibré", ... sous-entendent des expériences équiprobables.

Propriété

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le nombre total d'éventualités étant n, si un événement A est constitué de m éventualités alors sa probabilité est $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{effectif de A}}{\text{effectif de }\Omega} = \frac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables à A}}{\text{nbre de cas possibles}}$

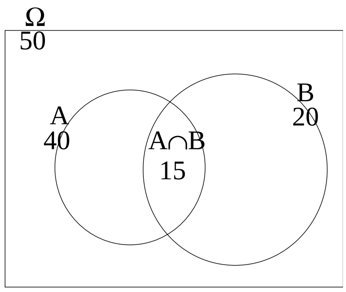
3) Propriétés des probabilités

Probabilité de la réunion de deux événements

Exemple

Un sac contient un ensemble de 50 jetons de formes et de couleurs différentes. 20 sont ronds, 40 sont rouges et 15 sont à la fois ronds et rouges.

On tire au hasard un jeton du sac. Calculons la probabilité pour qu'il soit rond ou rouge.



Désignons par A et B les événements :

A : "obtenir un jeton rouge" et B : "obtenir un jeton rond"

On peut représenter la situation par le schéma ci-contre :

Par lecture du schéma, le nombre d'éléments de $A \cup B$ est 40 + 20 - 15 (on note $\text{Card}(A \cup B) = 40 + 20 - 15$)

$$\text{et } p(\text{A ou B}) = \frac{(40 - 15) + 15 + (20 - 15)}{50} = \frac{40}{50} + \frac{20}{50} - \frac{15}{50} = p(A) + p(B) - p(\text{A et B})$$

Propriété

Si A et B sont deux événements quelconques alors $p(\text{A ou B}) = p(A) + p(B) - p(\text{A et B})$

Probabilité de la réunion de deux événements incompatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles, on a $A \cap B = \varnothing$ et $p(\text{A et B}) = 0$

Dans ce cas, $p(\text{A ou B}) = p(A) + p(A)$

Conséquence

Soit A un événement quelconque. A et $\overline{A}$ sont deux événements contraires donc $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

L'application directe de la dernière propriété donne $1 = p(\Omega) = p(\text{A ou }\overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$.

Soit $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

III) Probabilité conditionnelle

On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des résultats est muni d'une loi de probabilité p.
A et B sont des événements de E, avec A de probabilité non nulle.

1) Définition

> La probabilité de B sachant que A est réalisé**,** est le nombre réel, noté $p_B(A)$ défini par :
> $$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité de B sachant que A est réalisé devient alors :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

= proportion du nombre d'éléments de $A \cap B$ sur le nombre d'éléments de A.

Exemples

Xavier tire 1 carte parmi les 32 d'un jeu bien battu. On s'intéresse à la probabilité de l'événement B : « la carte tirée est un as » .

- Dans le cas où Yves n'a rien vu, il est clair que la probabilité de l'événement B est

$$p(B) = 4/32 = 1/8.$$

- Supposons maintenant que Yves a pu se rendre compte que la carte tirée n'est pas un honneur (valet, dame ou roi). Appelons A l'événement « la carte tirée n'est pas un honneur » de probabilité 20/32 = 5/8. On sait que cet événement B est réalisé. La probabilité cherchée est alors la probabilité conditionnelle :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{4/32}{5/8} = \frac{1}{5}$$

qu'on aurait pu aussi déterminer directement (4/20 = 1/5)
L'information apportée par la réalisation de l'événement A a permis de diminuer la probabilité de l'événement B.

- Supposons que Yves a pu se rendre compte que la carte tirée est rouge (événement A' de probabilité 1/2). Dans ce cas :

$$p_{A'}(B) = \frac{p(A' \cap B)}{p(A')} = \frac{2/32}{1/2} = \frac{1}{8}$$

La réalisation de A' ne change pas la probabilité de B.

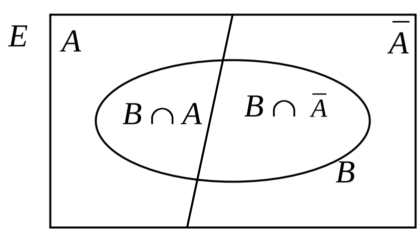
2) Formule des probabilités composées

Il résulte de la définition d'une probabilité conditionnelle la propriété suivante :

> Si on connaît la probabilité de l'événement A et la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé, on en déduit la probabilité de $A \cap B$ (événement A et B) :
> $$p(A \cap B) = p(A)\, p_A(B)$$

On peut aussi écrire $p(A \cap B) = p(B)\, p_B(A)$.

3) Formule des probabilités totales



Si A est un événement de probabilité non nulle et $\bar{A}$ son événement contraire, alors les événements $B \cap A$ et $B \cap \bar{A}$ constituent une partition de B.

Par suite, $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(A)\, p_A(B) + p(\bar{A})\, p_{\bar{A}}(B)$.
A et $\bar{A}$ constituent une partition de E. Cette situation se généralise à une partition quelconque de E.

Formule des probabilités totales

> Soit A_1, A_2,...,A_n des événements de probabilités non nulles constituant une partition de l'univers E.
> La probabilité d'un événement B de E peut se calculer par la formule :
> $$p(B) = p(A_1 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$$
> qu'on peut aussi écrire :
> $$p(B) = p(A_1)\times p_{A_1}(B) + p(A_2)\times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n)\times p_{A_n}(B).$$

4) Événements indépendants

Soit E l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire ; A et B sont deux événements de E.

Première définition

> Les événements A et B sont indépendants lors que la probabilité de l'un est la même que l'autre soit ou non réalisé.
> Autrement dit : $p(B) = p_A(B)$ ou $p(A) = p_B(A)$.

Exemple

- C'est le cas des événement *A'* et *B* étudiés au début du chapitre (voir l'exemple du tirage d'une carte), mais pas des événements *A* et *B*...

- On tire deux cartes au hasard une à une avec remise, dans un jeu de 32 cartes. On considère les événement T_1 : « la première carte tirée est un trèfle » et T_2 : « la deuxième carte tirée est un trèfle". Il est facile de montrer que les deux événements sont indépendants, mais que ce n'est plus le cas lorsque le tirage a lieu sans remise.

Deuxième définition

> Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que :
> $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

5) Modélisation d'expériences indépendantes

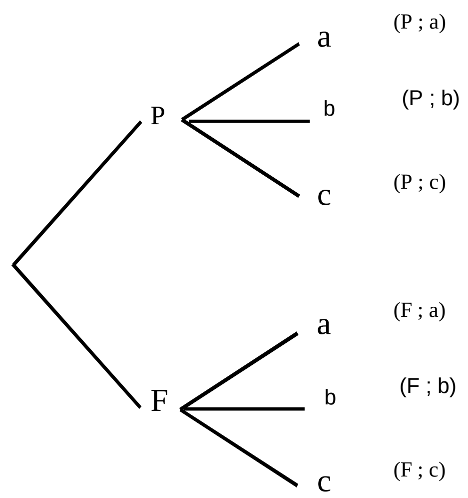
On considère les deux expériences aléatoires suivantes :

A : on lance une pièce de monnaie équilibrée, les issues de l'expérience sont notées *P* et *F*.

B : on tire au hasard un jeton dans une urne qui contient trois jetons portant les lettres *a*, *b* et *c*.

Lorsqu'on effectue successivement les deux expériences *A* et *B*, l'issue de l'une quelconque des deux expériences ne dépend pas de l'issue de l'autre.

Les issues de la nouvelle expérience qui consiste à effectuer successivement *A* et *B* sont des listes d'issues telles que (*P* ; *c*), …
L'arbre donnant toutes les listes de résultats possibles est :



On modélise cette expérience aléatoire en définissant la probabilité d'une liste d'issues comme le produit des probabilités de chaque issue.

IV) Lois

1) Espérance et variance d'une loi

Un exemple
Un jeu consiste à jeter un dé truqué.
On sait que $p(1) = p(3) = p(5) = p(6) = 0{,}1$ et que $p(2) = 0{,}2$ et $p(4) = 0{,}4$.
Le joueur gagne 10€ si le 1 sort, 20€ si le 2 sort, 30€ si le 3 sort, …, 60€ si le 6 sort.
On considère l'ensemble des gains possibles, soit {10,20,30,40,50,60}.
et la loi de probabilité associant à chacun des gains la probabilité de l'obtenir.
Cette loi est donnée par :

Gain	10	20	30	40	50	60
Probabilité du gain	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1

On appelle espérance de cette loi le nombre

$$m = 10\times0{,}1 + 20\times0{,}2 + 30\times0{,}1 + 40\times0{,}4 + 50\times0{,}1 + 60\times0{,}1 = 35.$$

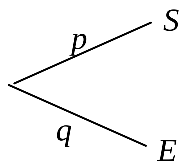
On appelle variance de cette loi le nombre :

$$V = (10 - 35)^2\times0{,}1 + (20 - 35)^2\times0{,}2 + (30 - 35)^2\times0{,}1 + (40 - 35)^2\times0{,}4 + (50 - 35)^2\times0{,}1 + (60 - 35)^2\times0{,}1 = 205$$

L'écart-type de cette loi, noté σ, est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$.

2) Loi de Bernoulli

Une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues possibles (succès S ou échec E) est appelée *épreuve de Bernoulli*.



avec $q = 1 - p$

La loi de Bernoulli associée à cette épreuve est défini par :

x_i	S	E
p_i	p	q

Exemples

- Le jet d'une pièce de monnaie bien équilibrée constitue un exemple simple d'épreuve de Bernoulli : la probabilité du succès (pile par exemple) est 0,5, ainsi que celle de l'échec.

La loi est résumée par le tableau

x_i	S	E
p_i	1/2	1/2

- On lance un dé cubique bien équilibré et on s'intéresse à l'obtention ou non du 6. La probabilité du succès est 1/6. La loi est résumée par le tableau :

x_i	S	E
p_i	1/6	5/6

3) Loi binomiale

> On appelle *schéma de Bernoulli* une expérience qui consiste à répéter plusieurs fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli.

Exemple

- Si on jette trois fois la même pièce de monnaie en appelant succès l'événement « obtenir pile » on est en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.

- Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches.

Une expérience consiste à extraire trois boules de l'urne et à noter leur couleur.
Si le tirage se fait avec remise, on est bien en présence d'un schéma de Bernoulli à trois épreuves, la probabilité d'un succès (obtenir une boule blanche par exemple) étant 5/8, et celle d'un échec (obtenir une boule noire) 3/8.
Si par contre le tirage a lieu sans remise, nous ne sommes plus en présence d'un schéma de Bernoulli, puisque les épreuves ne sont plus indépendantes les unes des autres (ainsi la probabilité d'obtenir une boule blanche dépend alors des tirages précédents).

> Quand dans un schéma de Bernoulli où l'on répète n fois une expérience de Bernoulli avec un succès de probabilité p, on s'intéresse au nombre de succès obtenu.
> Ce nombre est dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, ..., n\}$.
> La loi de probabilité sur cet ensemble est appelée *la loi binomiale de paramètres n et p*.

Propriété
L'espérance de la loi binomiale de paramètres n et p est égale à np.