Fonction logarithme népérien

I. La fonction logarithme népérien

1) Définition

La fonction logarithme népérien est une fonction, notée ln, qui vérifie les propriétés suivantes :

elle est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$;

$\ln 1 = 0$;

elle est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse, soit $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2) Quelques propriétés autour de cette définition

- La fonction ln étant dérivable sur $]0 ; +\infty[$, elle est continue sur cet intervalle.
- La fonction ln a pour dérivée $\frac{1}{x}$: on dit aussi que $\frac{1}{x}$ a pour *primitive* $\ln x$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

II. Les propriétés algébriques de la fonction ln

1) Propriété fondamentale

Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

Démonstration

Soit a un nombre réel strictement positif ; considérons la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$g(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$.

Elle est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée vaut :

$$g'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Comme sa dérivée est nulle sur $]0 ; +\infty[$, on sait que g est une fonction constante.

Pour tout x, $g(x) = g(1) = \ln a - \ln a - \ln 1 = 0$.

Par suite, pour tout x réel, $\ln(ax) - \ln a - \ln x = 0$, donc $\ln ax = \ln a + \ln x$.

En faisant $x = b$, on obtient le résultat attendu.

2) Conséquence : les autres propriétés algébriques

Pour tous réels strictement positifs a et b, et tout entier relatif n, on a :

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

III. Étude de la fonction logarithme

1) La fonction ln

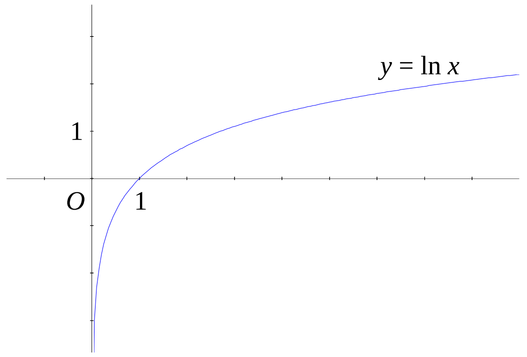
La fonction ln est définie sur]0 ; +∞[. Comme elle est dérivable sur cet intervalle, elle est aussi continue sur]0 ; +∞[. $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$: par suite la fonction ln est strictement croissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Tous ces résultats sont consignés dans le tableau de variation suivant:

x	0		+∞
$1/x$	‖	+	
$\ln x$	‖	−∞ ↗	+∞

On obtient la représentation graphique suivante :



2) Le nombre e

La fonction ln est continue strictement croissante sur]0 ; +∞[: comme ln 2 < 1 et ln 3 > 1, l'équation ln $x = 1$ admet une seule solution sur l'intervalle [2 ; 3].
Autrement dit, il existe un seul nombre réel noté e tel que $\ln e = 1$

e est appelé *base des logarithmes népériens.*

Une valeur approchée de e avec 46 décimales exactes est :

$e \approx$ 2;7182818284590452353602874713526624977572470937

On peut remarquer que pour tout entier relatif n, on a : $\ln (e^n) = n$.

La fonction ln est strictement croissante sur]0;+∞[
(puisque sa dérivée est strictement positive sur]0;+∞[)
Le signe de ln x est immédiatement fourni par le sens de variation de la fonction ln :

- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$
- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$

3) Résolutions d'équations et d'inéquations

Comme ln est strictement croissante et continue de]0;+∞[sur ℝ

Pour tous réels a et b strictement positifs, $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

Pour tous réels a et b strictement positifs, $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

Soit m un entier relatif, l'équation $\ln(x) = m$ a pour unique solution $x = e^m$

De même, $\ln(x) \geqslant m \Leftrightarrow x \geqslant e^m$ et $\ln(x) \leqslant m \Leftrightarrow 0 < x \leqslant e^m$

4) Limites à connaître
Théorèmes (croissances comparées de la fonction ln et des fonctions puissances)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, pour tout $n \geqslant 2$ Autrement dit : *Toute puissance de x l'emporte sur ln(x) à l'infini*

Démonstration :
On va comparere $\ln(x)$ et $\sqrt{x}$.
On va pour cela étudier la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.
…
Montrer que le minimum est strictement positif
…
Donc $\sqrt{x} \geqslant \ln(x)$ puis $\dfrac{\sqrt{x}}{x} \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x}$ soit encore $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x}$

Et, pour $x \geqslant 1$ (on cherche la limite en $+\infty$), $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et, par le théorème des gendarmes, la limite en $+\infty$ est nulle.

Pour déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$, posons $X = \dfrac{1}{x}$ on a alors $x = \dfrac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$

On peut écrire $x\ln x = \dfrac{1}{X}\ln\dfrac{1}{X} = -\dfrac{1}{X}\ln X = -\dfrac{\ln X}{X}$

Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{\ln X}{X} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$.

Pour la comparaison ln et puissance

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$$

Chaque facteur étant de limite nulle, le produit également.

5) Dérivée de ln o *u*
Propriété
Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction ln o u qui à x associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur I, et on a : $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$

Dem : La fonction ln étant dérivable sur $]0;+\infty[$, l'application de la propriété de dérivation des fonctions composées permet d'affirmer que si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction $\ln \circ u$ qui à x associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur I,

et on a : $(\ln \circ u)' = u' \times \ln' \circ u = u' \times \dfrac{1}{u} = \dfrac{u'}{u}$