Dérivation

I. Nombre dérivé d’une fonction en un point

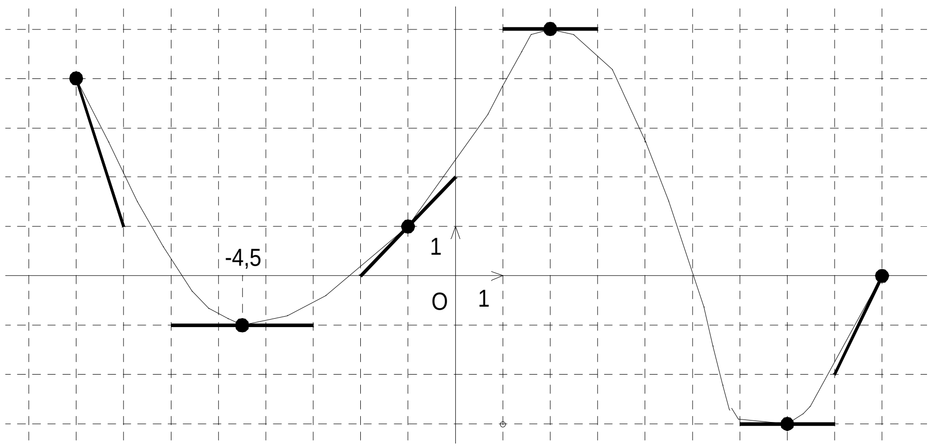
Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur un intervalle I et a un nombre réel de cet intervalle.

1) Définition

> Le nombre dérivée de la fonction f au point a est par définition la pente de la tangente, *si elle existe*, à la courbe représentative de f au point d’abscisse a.
> Il se note $f’(a)$.

Exemple

On considère la fonction f suivante, dont la représentation graphique est donnée ci-après :



La fonction f est définie sur ....

$f’(–8)$ = $f’(–4;5)$ = $f’(–1)$ =

$f’(2)$ = $f’(7)$ = $f’(9)$ =

2) Equation de la tangente

On suppose la fonction f dérivable en a. Elle admet donc une tangente au point A d'abscisse a, d’équation $y = mx + p$.

L’équation de la tangente est donc $y = f’(a)\, x + f(a) – f’(a)\, a$ que l’on peut réordonner en :

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Démonstration :

Déterminons m et p.

- m est la pente de la droite : on a donc $m = f’(a)$.L’équation de la tangente est donc

$$y = f'(a)\, x + p$$

- Par ailleurs, elle passe par le point A de coordonnées $(a;f(a))$. Les coordonnées de A vérifient donc l’équation :

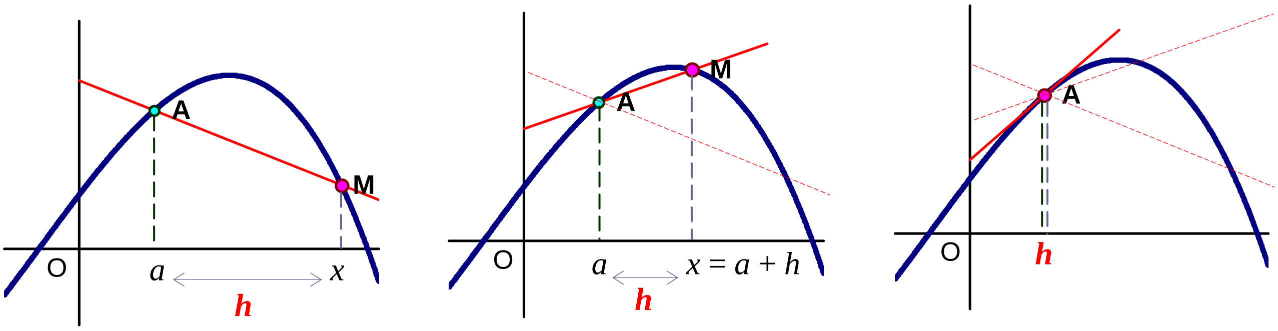
$$f(a) = f’(a)\, a + \mathrm{b}$$

d’où on tire $b = f(a) – f’(a)\, a$.

3) Existence du nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I. a et $x = a + h$ sont deux valeurs distinctes de I. $A(a,f(a))$ et $M(x,f(x))$ sont deux points de la courbe représentative de la fonction f.

Le coefficient directeur de la sécante (AM) à la courbe est $m = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, c’est le *taux de variation* de la fonction entre a et x.



Lorsque M devient de plus en plus proche de A, mais $M \neq A$ et si m a une limite quand x tend vers a alors cette limite est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe.

Autrement dit : Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe est $l = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pourvu que cette limite existe. Dans ce cas, le nombre l est appelé dérivée de la fonction f au point a. On le note $f'(a)$.

En posant $x = a + h$ on obtient une autre forme pour l'expression de la dérivée de la fonction f au point a

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

II. Fonction dérivée

1) Définition.

On dit qu'une fonction f est *dérivable* sur un intervalle I lorsque, pour tout réel de l'intervalle I, le nombre dérivé de f en x existe.
Par définition, la fonction dérivée f' est la fonction qui à tout réel x de l'intervalle I associe $f'(x)$, nombre dérivé de f en x.

Exemple

On considère la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit a un nombre réel quelconque. La pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $2a$; le nombre dérivé de la fonction f en a est $f'(a) = 2a$.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque le nombre dérivé de f en tout réel a existe.
On peut alors définir la fonction dérivée de f, notée f', par :

$$f' : a \mapsto f'(a) = 2a$$

2) Dérivées usuelles (cf feuille polycopiée)

On admet les formules de dérivation pour les fonctions usuelles ci-dessous.

Fonction	**Dérivée**	**Validité**
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	k nombre réel constant ; $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	n entier naturel supérieur ou égal à 2 ; $x \in \mathbb{R}$

Fonction	Dérivée	Validité
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	n entier naturel non nul $x \in \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \left]0 ; +\infty\right[$

3) Opérations et dérivées

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un nombre réel fixé.

Fonction	Dérivée	Dérivabilité
Somme $f = u + v$	$f' = u' + v'$	dérivable sur l'intervalle I
Produit $f = ku$ $f = uv$	$f' = ku'$ $f' = u'v + uv'$	dérivable sur l'intervalle I
Quotient $f = \dfrac{1}{v}$ $f = \dfrac{u}{v}$	$f' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	dérivable pour les x de I où $v(x) \neq 0$

Remarquons que si $f = u^2 = u \times u$, alors $f' = u'u + uu' = 2uu'$.

III. Dérivation d'une fonction composée

1) Théorème de dérivation d'une fonction composée g o u

Soit u et g deux fonctions telles que la composée $f = g \circ u$ existe sur un intervalle I. Si u est dérivable en x de I et g dérivable en $u(x)$, alors $f = g \circ u$est dérivable en x et :

$$f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x).$$

dérivée de g appliquée en $u(x)$

dérivée de u en x

Exemples

Écrire chacune des fonctions qui suivent comme composée de deux fonctions et en déduire la dérivée :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(x) = (2x^2 - x + 1)^6$

2) Conséquences du théorème : des dérivées à bien connaître

Fonction	**Dérivée**
$f = u^n$, n est un entier naturel, $n \geqslant 1$	$f' = nu^{n-1} \times u'$
$f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$	$f' = -\dfrac{1}{u^2} \times u' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$f = \sqrt{u}$, avec $u(x) > 0$	$f' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f = \dfrac{1}{u^n}$ avec $u(x) \neq 0$	$f' = \dfrac{-n}{u^{n+1}} \times u' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

IV. Dérivation et étude de fonctions

On peut obtenir le sens de variation d'une fonction f, dérivable sur un intervalle I :

soit à partir d'une somme de fonctions de même sens de variation;
soit à partir de composées de fonctions;
soit en utilisant le théorème fondamental suivant (admis) :

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée est positive sur I, alors f est croissante sur I.
Si la dérivée est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
Si la dérivée est nulle en toute valeur de I, alors la fonction f est constante sur I.

Lorsque la dérivée d'une fonction s'annule, en changeant de signe, la fonction f admet un extremum.
En effet deux types de tableaux de variation peuvent se rencontrer :

Cas d'un maximum

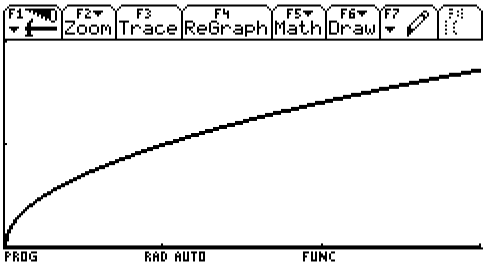
valeurs de x	a		c		b
signe de $f'(x)$		+	0	−	
variations de f		$\nearrow$	maximum	$\searrow$	

Cas d'un minimum

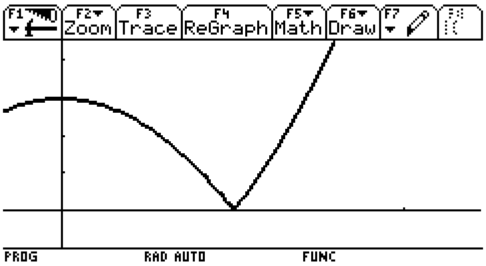
valeurs de x	a		c		b
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations de f		$\searrow$	minimum	$\nearrow$	

Compléments : différents exemples graphiques de fonctions non dérivables en un point

- **Il existe une tangente verticale :** c'est le cas de la fonction racine carrée à l'origine. La pente de la tangente est donc infinie et le nombre dérivé de la fonction en 0 n'existe pas.



- **Il existe une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche, de pentes différentes.** C'est le cas par exemple au point d'abscisse 1 de la courbe ci-dessous. La demi-tangente à droite est différente de la demi-tangente à gauche : leurs pentes sont aussi différentes. Le nombre dérivé de la fonction n'est pas défini en ce point (on parle parfois de dérivée à droite pour désigner la pente de la demi-tangente à droite et de dérivée à gauche).



- **Il peut aussi ne pas exister de tangente en un point donné, ni de demi-tangente à droite ou à gauche :** c'est le cas de certaines courbes très irrégulières, comme celle qui suit au point d'abscisse 0. Le nombre dérivé de la fonction au point considéré n'existe pas (on dit aussi que la fonction n'est pas dérivable en ce point).