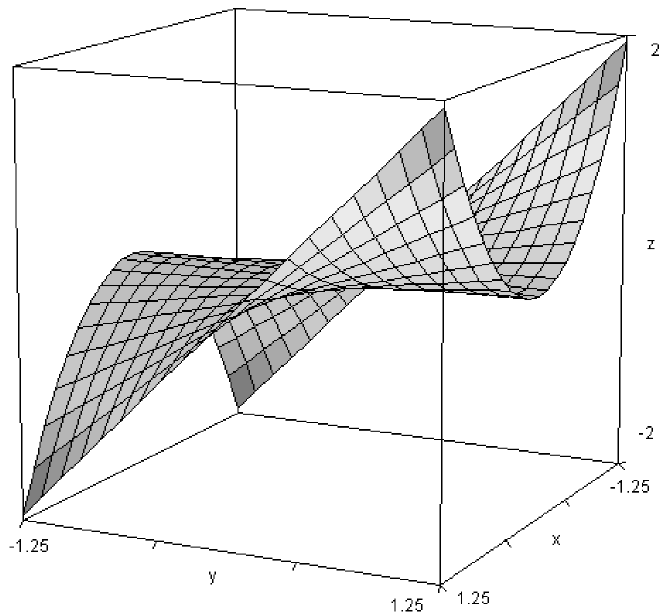
Centres étrangers I, juin 2003

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).
On considère la surface (T) d'équation :

$x^2y = z$ avec $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

La figure ci-dessous est une représentation de la surface (T), dans le cube de centre O et de côté 2.



1) **Eléments de symétrie de la surface (*T*)**
a) Montrer que si le point $M(x,y,z)$ appartient à (T), alors le point $M'(-x,y,z)$ appartient aussi à (T).
En déduire un plan de symétrie de (T).
b) Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de (T).
2) **Intersections de la surface (*T*) avec des plans parallèles aux axes**
a) Déterminer la nature des courbes d'intersection de (T) avec les plans parallèles au plan (xOy).
b) Déterminer la nature des courbes d'intersection de (T) avec les plans parallèles au plan (yOz).
3) **Intersections de la surface (*T*) avec des plans parallèles aux plans (*xOy*) d'équations $z = k$, avec $k \in [0;1]$.**
a) Déterminer l'intersection de la surface (T) et du plan d'équation $z = 0$.
b) Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0,0,k)$.

Déterminer, dans le repère ($K, \vec{i}, \vec{j}$), l'équation de la courbe d'intersection de (T) et du plan d'équation $z = k$.

c) Tracer l'allure de cette courbe dans le repère ($K, \vec{i}, \vec{j}$). On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.
4) On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface (T).

$(D) = \{M(x,y,z) \in (E)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$; $0 \leqslant z \leqslant x^2y\}$

a) Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question 3) c). C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées (x,y,z) tels que $y \geqslant \frac{k}{x^2}$ et $z = k$.

Calculer en fonction de k, l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.
b) On pose $S(0) = 1$, calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).

On rappelle $V = \int_0^1 S(k)\,dk$.