Lycée
PIERRE CORNEILLE

Terminales ES

jeudi 19 février 2009

BACCALAUREAT BLANC

Epreuve de Mathématiques (3 H)

Elèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat doit traiter les cinq exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : Q.C.M (sur 4 points)
Commun à tous les élèves

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez la réponse que vous jugez convenir, sans justifier votre choix.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point. Une question sans réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point.

1. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f\,'$. Son tableau de variation est donné ci-dessous. On nomme $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

On peut affirmer que la courbe $\mathcal{C}$ admet:

- la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.
- la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote.
- la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote.

2. Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = 2\ln(x) - 3x + 4$.
Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

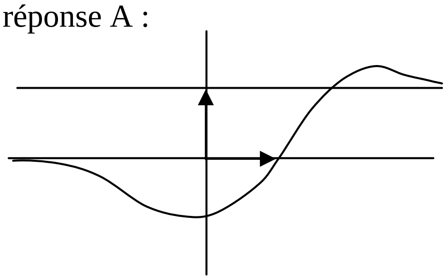
- $y = -x + 2$
- $y = x + 2$
- $y = -x - 2$

3. Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on peut affirmer que $\ln\left(b\sqrt{a}\right)$ est égal à :

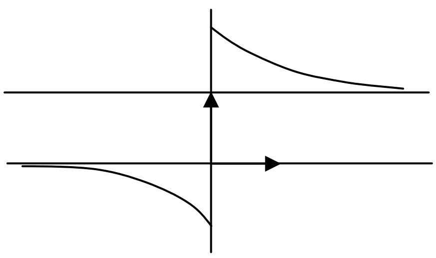
- $\frac{1}{2}a\ln(b)$
- $\frac{1}{2}\ln(ba)$
- $\ln(b) + \frac{1}{2}\ln(a)$

4. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La courbe représentative de f peut avoir l'allure suivante :

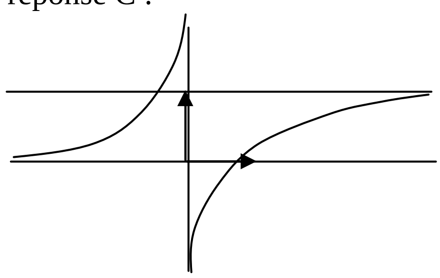
réponse A :



réponse B :



réponse C :



Exercice 2 (sur 5 points)
Commun à tous les élèves

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

Âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
Rang x_i	0	1	2	3	4
Montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2229	2285	2340	2394	2449

(Source : *CARMF* Mai 2004)

1) Calculer l'augmentation en pourcentage du montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. On donnera le résultat arrondi à l'unité.

2) Sur le papier millimétré fourni, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;
- sur l'axe des ordonnées, on placera 2200 à l'origine et on choisira 1cm pour 20 euros .

3) *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
Représenter la droite (D) dans le repère précédent.

4) Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?

5) En fait le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2555 euros et le montant du rachat d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3% par an.
Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

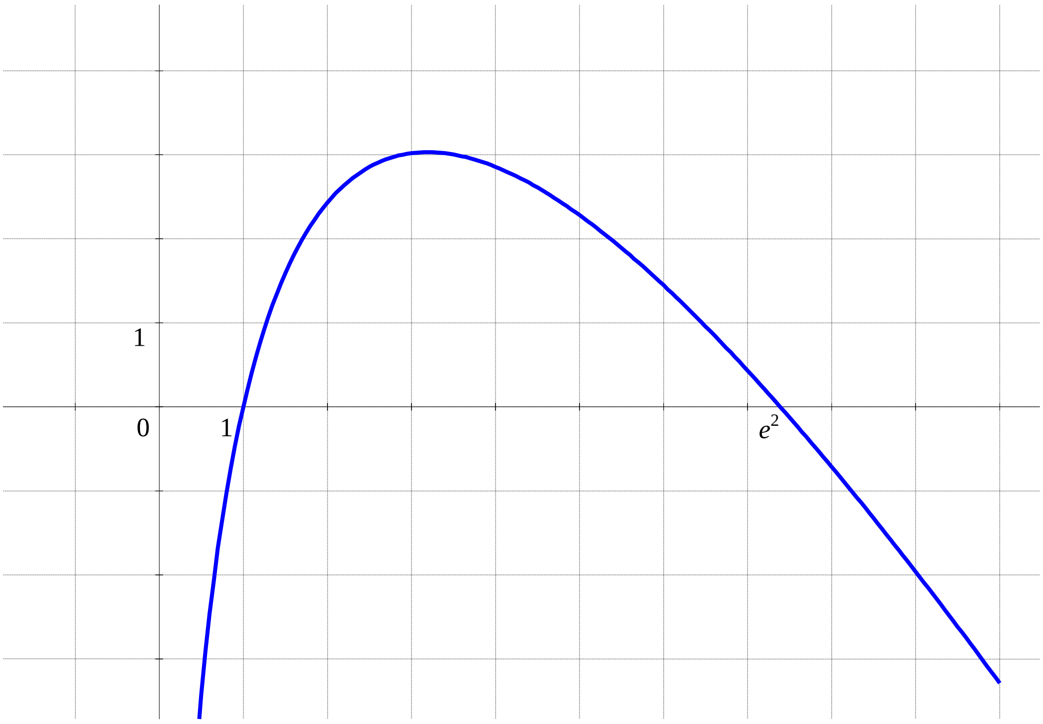
Exercice 3 (sur 2,5 points)

Elèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans une entreprise, on a modélisé le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de x centaines d'appareils par la fonction f définie sur l'intervalle $] 0 ; +\infty [$ par :

$f(x) = -2x + (e^2 - 1) \ln(x) + 2$.

La courbe représentant la fonction f est donnée ci-dessous :



1. Vérifier par le calcul que $f(1) = 0$ et $f(e^2) = 0$.

2. A l'aide du graphique, déterminer approximativement :

a. Le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice :

b. Les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul.

3. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $] 0 ; +\infty [$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $] 0 ; +\infty [$.

c. En déduire le nombre d'appareils vendus par cette entreprise quand elle réalise le bénéfice maximal (le résultat sera arrondi à l'unité).

Exercice 4 (sur 2,5 points)

Elèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (1) $x^2 - 9x + 14 = 0$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations :

(2) $(\ln x)^2 - 9 \ln x + 14 = 0$.

(3) $\ln(x^2 - 3x - 4) - \ln 2 = \ln(x - 3) + \ln 3$.

Exercice 4 (sur 6 points)

Commun à tous les élèves

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;20]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + \frac{3}{4}\ln(4x+10) - 3\ln x.$$

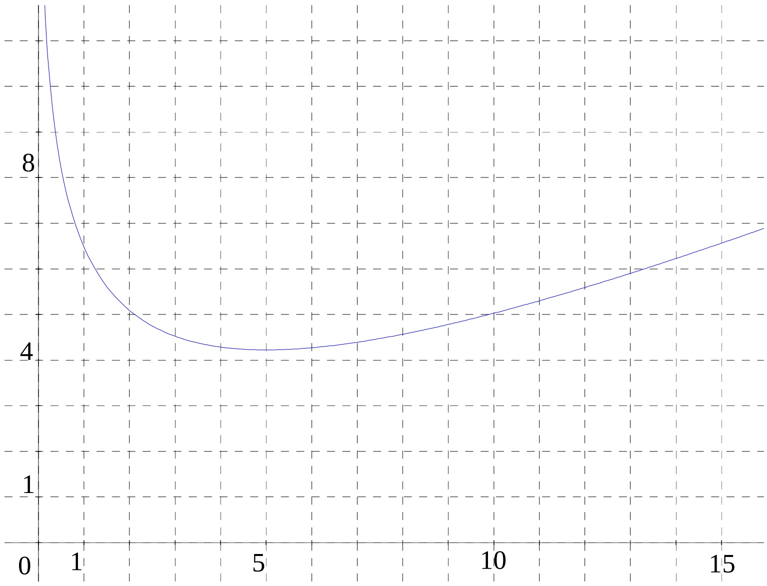
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe ci-dessous représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Partie A

1) Déterminer la limite de f en 0. Quelle interprétation graphique peut-on en donner ?

2) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;20]$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x(2x+5)}$.

3) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;20]$ et dresser son tableau de variations.



On admet que l'équation $f(x) = 6$ possède exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0;20]$ telles que $\alpha \approx 1{,}242$ et $\beta \approx 13{,}311$.

Partie B

Une entreprise produit au maximum 20 000 objets par jour.
On note x le nombre de milliers d'objets produits chaque jour travaillé : $x \in]0;20]$.
On admet que le coût moyen de fabrication, exprimé en euros, d'un objet est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie ci-dessus.

1) a) Pour combien d'objets produits le coût moyen de fabrication est-il minimal ?
   b) Déterminer ce coût moyen minimal, arrondi au centime.

2) Le prix de vente d'un objet est de 6€.
   Pour quelles productions journalières l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

3) Déterminer le bénéfice journalier, arrondi à la centaine d'euros, pour une production de 5 000 objets par jour.

4) L'année suivante, le coût moyen augmente de 2 %. Le prix de vente est alors augmenté de 2 %.
   Le bénéfice journalier reste-t-il identique ? Justifier.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.