II) <u>Repères du plan. Coordonnées de points et de vecteurs</u>

1) <u>Repères du plan</u>

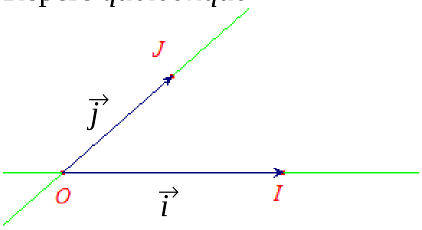
Choisir un repère dans le plan c'est :

- choisir un point O, appelé *origine du repère*,
- chosir deux vecteurs *non colinéaires* $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$,
- choisir *un ordre* entre $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

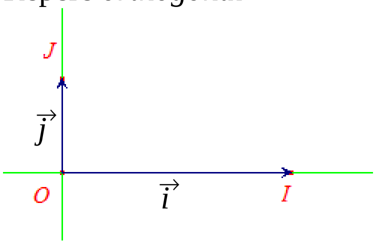
La droite (OI) munie du repère (O, $\vec{i}$) est *l'axe des abscisses* du repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et la droite (OJ) munie du repère (O, $\vec{j}$) est *l'axe des ordonnées*.

<u>3 cas se présentent :</u>

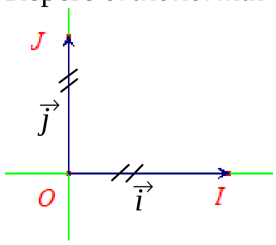
Repère *quelconque*



Repère *orthogonal*



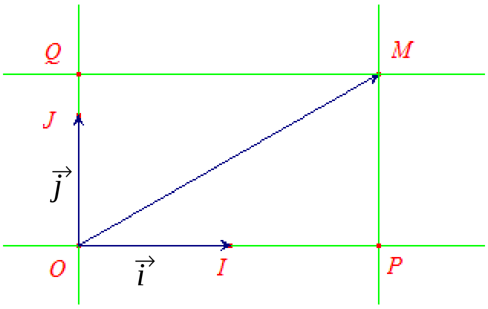
Repère *orthonormal*



2) <u>Coordonnées d'un point dans un repère</u>

Dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), tout point M du plan a pour coordonnées (x,y) telles que $\overrightarrow{OI} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, les coordonnées dans ce repère étant uniques.

x est *l'abscisse* du pont M et y son *ordonnée*.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

<u>Remarque</u>

Dans le plan, un point est repéré par deux coordonnées.
On dit que le plan est de dimension 2

3) <u>Coordonnées d'un vecteur dans une base</u>

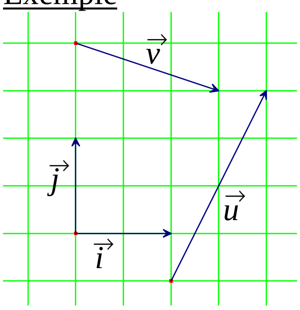
a) Définitions

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Le couple ($\vec{i}$, $\vec{j}$) s'appelle une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

Dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x;y) dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) signifie que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

On écrit alors $\vec{u}(x;y)$.

<u>Exemple</u>



Dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) ci-contre :

$\vec{u}(1;2)$ car $\vec{u} = \vec{i} + 2\,\vec{j}$

$\vec{v}\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ car $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

<u>Remarque</u>

Les coordonnées dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du vecteur du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

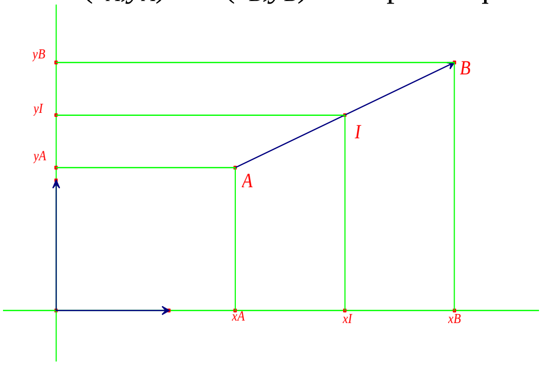
b) Propriétés

Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u} = \vec{v}$ ssi $x = x'$ et $y = y'$ (deux vecteurs sont égaux ssi ils ont mêmes coordonnées)
- $\vec{u} + \vec{v}\ (x + x';y + y')$
- $k\vec{u}(kx;ky)$

4) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du milieu du segment $[AB]$

Soit $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points quelconques.



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A;y_B - y_A)$$

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

5) Distance de deux points

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormal, la distance des points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Conséquence

Soit une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$, la norme du vecteur $\vec{u}(x;y)$ est $\sqrt{x^2 + y^2}$

III) Vecteurs colinéaires

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont deux vecteurs colinéaires ssi $xy' - x'y = 0$.

Démonstration

Exemples

Soit $\vec{u}(2;3)$, $\vec{v}\left(-3,-\frac{9}{2}\right)$ et $\vec{w}(3;4)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $2\times\left(-\frac{9}{2}\right) - (-3)\times 3 = 0$

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car $2\times 4 - 3\times 3 = -1 \neq 0$

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur

car $\vec{0}(0;0)$ et la relation $xy' - x'y = 0$ est toujours vérifiée.