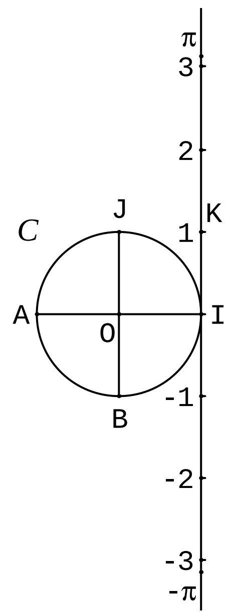
Chapitre
Trigonométrie

<u>I) Cosinus et sinus d’un nombre réel</u>

1) mesure des angles en radians

Soit *C* un cercle de centre *O*. *I* est un point de ce cercle. On prend pour unité de longueur la longueur *OA*.
Soit *J* un autre point du cercle tel que le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ soit orthonormé.
On <u>oriente</u> le plan dans le sens direct.

Soit *d* la droite tangente au cercle en *A*. On note *K* le point de coordonnées (1 ; 1).
On munit *d* du repère $(I ; \overrightarrow{IK})$.
Le nombre π est le quotient entre la circonférence d’un cercle et son diamètre.
Dans l’unité de longueur choisie, c’est la longueur du demi-cercle *C*.



"Enroulons" *d* sur le cercle.
Les points de *d* viennent en coïncidence avec les points du cercle.

<u>Exemple :</u> Si *A'* est le point de *d* repéré par π, alors le point du cercle en coïncidence avec *A'* est *A*.

Placer un point *J'* sur la droite *d* tel que *J* et *J’* coïncident.

La longueur de $\overset{\frown}{IJ}$ est $\frac{\pi}{2}$, donc $IJ' = \frac{\pi}{2}$.

2) Définition : Soit *M'* un point de *d* repéré par *x*.
En "enroulant" *d* sur le cercle, on obtient un point *M* sur le cercle *C* tel que *M* et *M'* coïncident. Une mesure de l’angle $\widehat{IOM}$ en **radians** est alors *x* rad.

$\widehat{IOI} = 0$ rad $= 2\pi$ rad

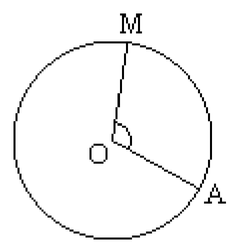
$\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}$ rad $= \frac{\pi}{2} + 2\pi$ rad $= \frac{5\pi}{2}$ rad

$\widehat{IOA} = \pi$ rad $= 3\pi$ rad

$\widehat{IOB} = \frac{3\pi}{2}$ rad $= \frac{7\pi}{2}$ rad

On dit que chacun des réels x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, ..., $x - 2\pi$, $x - 4\pi$; ... est une mesure de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ et plus généralement les réels de la forme $x + k\times 2\pi$. En effet, la différence entre deux de ces mesures est un multiple de 2π c'est-à-dire correspondant à la longueur d'un certain nombre de tours complets.

<u>Remarque :</u> Si on considère un cercle de centre *O*, de rayon *r*, et un angle $\widehat{AOM}$,
A et M étant deux points du cercle. Désignons par *l* la longueur de l’arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$.
Une **mesure en radians** de l’angle $\widehat{AOM}$ est le réel $\alpha = \frac{l}{r}$.
Dans le cas où le cercle est de rayon 1, une mesure de l'angle en radians, coïncide avec la longueur de l'arc.



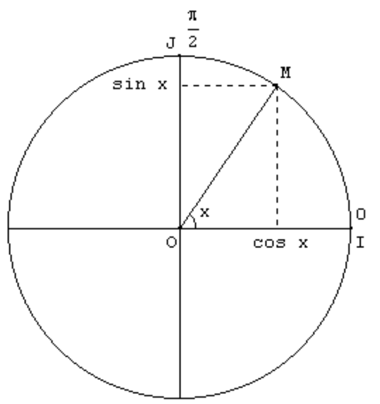
3) Correspondance entre degrés et radians

Il y a proportionnalité entre la mesure des angles en degrés et mesure en radians ; il faut juste retenir que 180 degrés correspondent à π radians.

Mesure en degrés	180	30	45	60	90	360
Mesure en radians	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2π

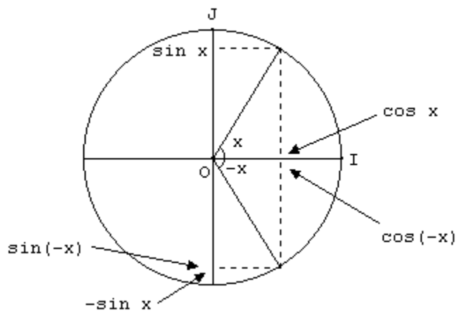
II) Cosinus et sinus d'un nombre réel

Dans un repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$), on note *C* le cercle de centre *O* et de rayon 1.
On oriente le plan dans le sens direct . *C* est appelé le **cercle trigonométrique**.



Définition : Soit *M* un point de C tel que $\widehat{IOM} = x$ rad ($x \in$ 3).
Le cosinus de *x*, noté cos *x*, est l'abscisse de *M*.
Le sinus de *M*, noté sin *x*, est l'ordonnée de *M*.

Exemples : $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$; $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$;
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.



Propriété 1 :
Pour tout *x* réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$;
$-1 \leq \sin x \leq 1$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
(cette dernière propriété est due au théorème de Pythagore).

Valeurs remarquables du cosinus et du sinus d'un angle

Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

III) Fonctions circulaires

1) Fonction cosinus

La fonction cosinus est définie sur ℝ et, pour tout réel *x* :

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$: la fonction cosinus est périodique, de période 2π, il suffit donc d'étudier la fonction cosinus sur un intervalle de longueur 2π, soit $[-\pi;\pi]$ par exemple.

$\cos(-x) = \cos(x)$: la fonction cosinus est paire et il suffit alors d'étudier la fonction sur $[0;\pi]$.

$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$: la fonction cosinus admet un maximum égal à 1 en 0 et un minimum égal à –1 en π.

Tableau de variation de la fonction cosinus sur $[0;\pi]$:

x	0 π
$\cos(x)$	1 ↘ -1

2) Fonction sinus

La fonction sinus est définie sur ℝ et, pour tout réel x :

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$: la fonction sinus est périodique, de période 2π, il suffit donc d'étudier la fonction sinus sur un intervalle de longueur 2π, soit $[-\pi;\pi]$ par exemple.

$\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sinus est impaire et il suffit alors d'étudier la fonction sur $[0;\pi]$.

$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$: la fonction sinus admet un maximum égal à 1 en $\frac{\pi}{2}$ et un minimum égal à -1 en $-\frac{\pi}{2}$.

Tableau de variation de la fonction sinus sur $[0;\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

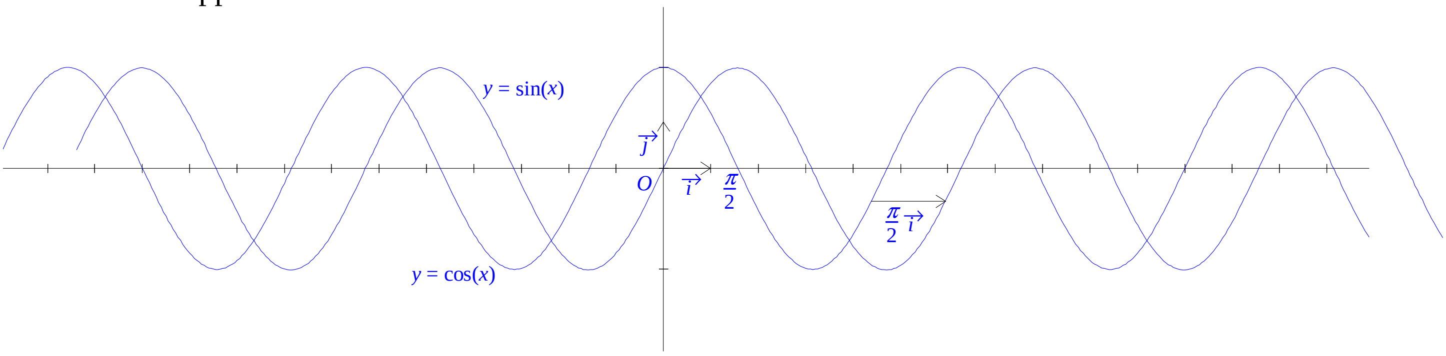
3) Représentation graphique

Pour tracer les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus, on utilise :

La parité (symétrie par rapport à l'origine pour la fonction sinus, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour la fonction cosinus)

La périodicité (invariance de la courbe par les translations de vecteur $k\times 2\pi\,\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$).

Ces courbes s'appellent des sinusoïdes.



Remarque : comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$, la courbe représentative de la fonction sinus se déduit de celle de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.