Autour de $\sqrt{2}$

Méthode 1 : Texte de L. EULER (1707-1783).

Généralifons ce que nous venons d'expofer, en fuppofant que l'équation donnée foit xx = a, & qu'on fache d'avance que x eft plus grand que n, mais plus petit que n + 1. Si après cela nous fuppofons x = n + p, en forte que p doive être une fraction, & que pp puiffe fe négliger comme une quantité très petite, nous aurons xx = nn + 2np = a ; ainfi 2np = a – nn, & p = $\frac{a-nn}{2n}$ *; par conséquent x = n +* $\frac{a-nn}{2n} = \frac{nn+a}{2n}$*. Or fi n approchait déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur* $\frac{nn+a}{2n}$ *en approchera encore beaucoup plus. Ainfi en la fubftituant à n, on fe trouvera encore plus prés de la vérité ; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra fubftituer de nouveau, afin d'approcher encore d'avantage ; & on pourra continuer le même procédé auffi loin qu'on voudra.*
Soit, par exemple, a = 2, c'eft-à-dire qu'on demande la racine quarrée de x ; fi on connaît déjà une valeur affez approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$*. Soit donc*

i) $n = 1$, *on aura* $x = \frac{3}{2}$,

ii) $n = \frac{3}{2}$, *on aura* $x = \frac{17}{12}$,

iii) $n = \frac{17}{12}$, *on aura* $x = \frac{577}{408}$;

& cette dernière valeur approche fi fort de $\sqrt{2}$ *, que fon quarré* $\frac{332929}{166464}$ *ne diffère du nombre 2 que de la petite quantité* $\frac{1}{166464}$ *, dont il le furpaffe.*

1. Lire le texte , extrait du livre « éléments d'algèbre », vérifier les résultats numériques donnés dans l'exemple pour a =2.
2. Constater que les nombres x sont les premiers termes de la suite ainsi construite $x_1 = 2$ et pour tout entier naturel, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer les premiers termes de la suite (x_n). Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?

Méthode 2 : Algorithme de Babylone.

R_1 est un rectangle de dimensions $x_1 = 2$ et $y_1 = 1$. On construit à partir de R_1 une suite de rectangles d'aire 2 qui se rapprochent de plus en plus de l'aire d'un carré d'aire 2.

R_2 a pour dimensions $x_2 = \dfrac{x_1 + y_1}{2}$ et $y_2 = \dfrac{2}{x_2}$.

R_3 a pour dimensions $x_3 = \dfrac{x_2 + y_2}{2}$ et $y_3 = \dfrac{2}{x_3}$ et ainsi de suite…

R_{n+1} a pour dimensions $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{2}{x_{n+1}}$. Vérifier que ces rectangles ont pour aire 2.

1. a) Vérifier que la suite x est telle que $x_1 = 2$ et pour tout n entier naturel non nul, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.

   b) Démontrer que pour tout n entier naturel, $x_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$. En déduire que pour tout n entier naturel, $x_n > \sqrt{2}$.

   c) Démontrer que la suite x est décroissante.

2. a) y est la suite définie sur ∠ par $y_n = \dfrac{2}{x_n}$. Démontrer que pour tout n entier naturel, $y_n < \sqrt{2}$.

   b) Démontrer que la suite y est croissante.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)}$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n on a $x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{1}{4}(x_n - y_n)^2$ puis que

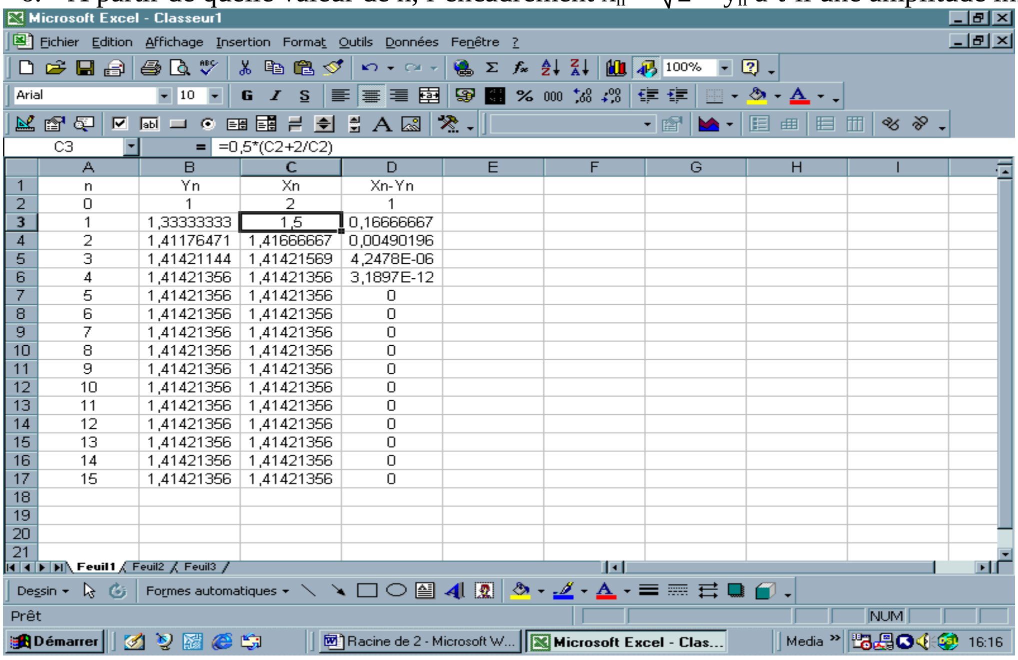
   $x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^2} \times \dfrac{1}{4^4} \times \dfrac{1}{4^8} \times \ldots \times \dfrac{1}{4^k}$ où $k = 2^{n-1}$.

   c) Démontrer enfin que pour tout entier naturel n on a $0 \le x_n - y_n \le \dfrac{1}{4^N}$ où $N = \dfrac{2^n - 1}{2}$. En déduire la limite de $x_n - y_n$.

4. Conclure que les deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et convergent vers $\sqrt{2}$.

5. Réaliser la feuille de calcul ci-dessous avec le tableur excel. Dans la cellule C2, on tape 2. Dans la cellule C3, on tape $= 0.5*(C2+\dfrac{2}{C2})$, puis on recopie vers le bas. Dans la cellule B2, on tape $=\dfrac{2}{C2}$ puis on recopie vers le bas. En D2, on tape = C2-B2 puis on recopie vers le bas.

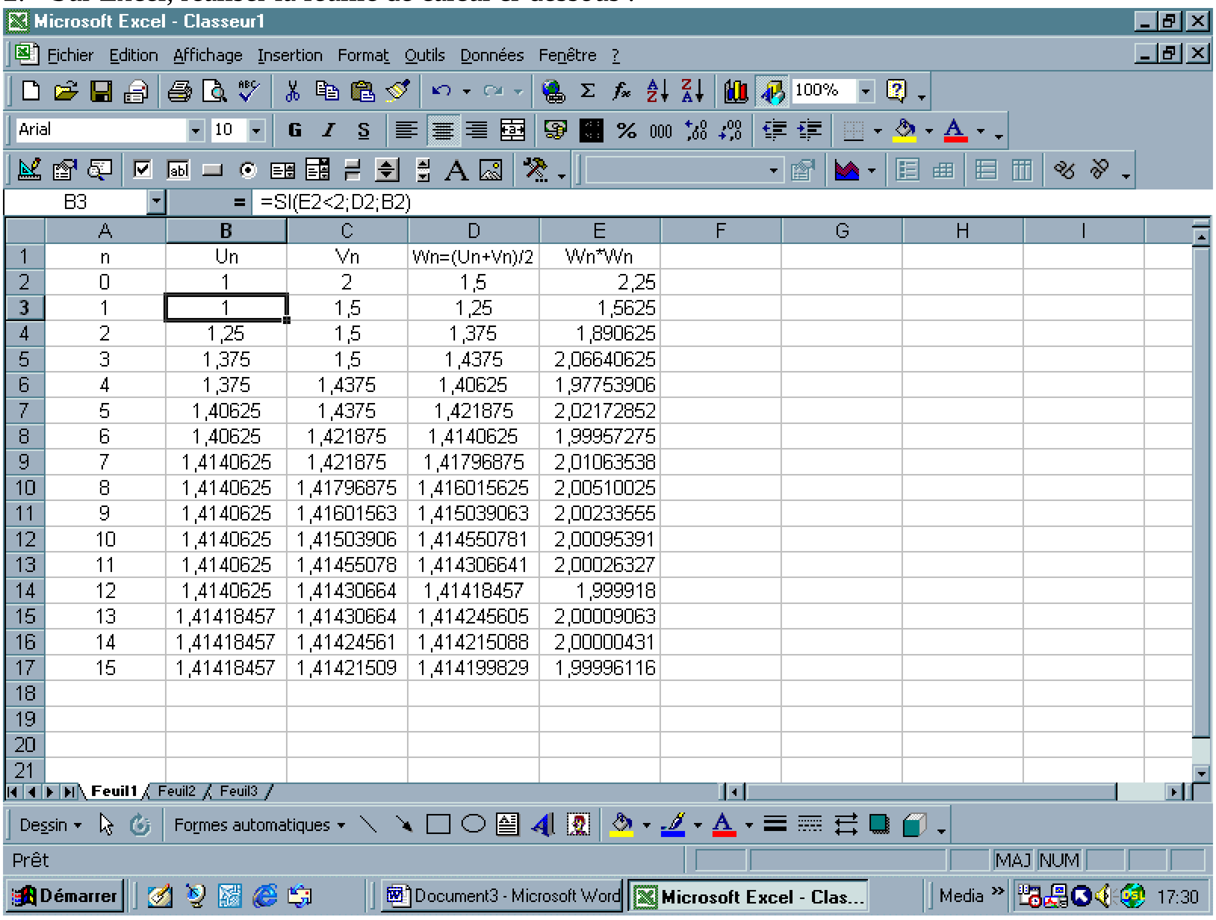
6. A partir de quelle valeur de n, l'encadrement $x_n < \sqrt{2} < y_n$ a-t-il une amplitude inférieure à 10^{-6} ?



	A	B	C	D
1	n	Yn	Xn	Xn-Yn
2	0	1	2	1
3	1	1,33333333	1,5	0,16666667
4	2	1,41176471	1,41666667	0,00490196
5	3	1,41421144	1,41421569	4,2478E-06
6	4	1,41421356	1,41421356	3,1897E-12
7	5	1,41421356	1,41421356	0
8	6	1,41421356	1,41421356	0
9	7	1,41421356	1,41421356	0
10	8	1,41421356	1,41421356	0
11	9	1,41421356	1,41421356	0
12	10	1,41421356	1,41421356	0
13	11	1,41421356	1,41421356	0
14	12	1,41421356	1,41421356	0
15	13	1,41421356	1,41421356	0
16	14	1,41421356	1,41421356	0
17	15	1,41421356	1,41421356	0

Méthode 3 : La dichotomie .

1. La méthode de dichotomie est une méthode itérative qui permet d'obtenir, de proche en proche, des encadrements successifs de $\sqrt{2}$. On part de $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$
   A chaque étape, l'amplitude de l'encadrement est divisé par deux.
   On part de l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$ et on pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.
   1ère étape : on prend le milieu 1,5 de l'intervalle [1 ;2]. On cherche à savoir si $\sqrt{2}$ appartient à [1 ; 1,5] ou [1,5 ; 2]. $1,5^2 = 2,25$ donc $1,5^2 > 2$ et $1 < \sqrt{2} < 1,5$. On pose $u_1 = 1$ et $v_1 = 1,5$.
   2ème étape : on prend le milieu 1,25 de l'intervalle [1 ;1,5]. On cherche à savoir si $\sqrt{2}$ appartient à [1 ; 1,25] ou [1,25 ; 1.5]. $1,25^2 = 1,5625$ donc $1,25^2 < 2$ et $1,25 < \sqrt{2} < 1,5$. On pose $u_2 = 1,25$ et $v_2 = 1,5$.
2. Sur Excel, réaliser la feuille de calcul ci-dessous :



B3 = =SI(E2<2;D2;B2)

	A	B	C	D	E
1	n	Un	Vn	Wn=(Un+Vn)/2	Wn*Wn
2	0	1	2	1,5	2,25
3	1	1	1,5	1,25	1,5625
4	2	1,25	1,5	1,375	1,890625
5	3	1,375	1,5	1,4375	2,06640625
6	4	1,375	1,4375	1,40625	1,97753906
7	5	1,40625	1,4375	1,421875	2,02172852
8	6	1,40625	1,421875	1,4140625	1,99957275
9	7	1,4140625	1,421875	1,41796875	2,01063538
10	8	1,4140625	1,41796875	1,416015625	2,00510025
11	9	1,4140625	1,41601563	1,415039063	2,00233555
12	10	1,4140625	1,41503906	1,414550781	2,00095391
13	11	1,4140625	1,41455078	1,414306641	2,00026327
14	12	1,4140625	1,41430664	1,41418457	1,999918
15	13	1,41418457	1,41430664	1,414245605	2,00009063
16	14	1,41418457	1,41424561	1,414215088	2,00000431
17	15	1,41418457	1,41421509	1,414199829	1,99996116

« SI5(E2<2 ;D2 ;B2) » signifie que **si** E2< 2 **alors** dans B3 s'inscrit le contenu de D2, **sinon** dans B3 s'inscrit le contenu de B2.
Après observation de cette feuille de calcul, émettre diverses conjectures.

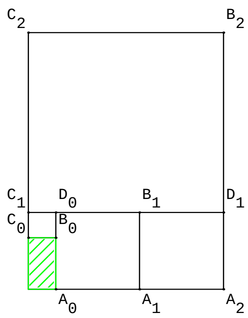
Un énoncé de questions pourra ensuite être élaboré par les élèves avec l'aide du professeur, comme par exemple :

3. *Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n en distinguant deux cas.*
4. *a) Pour tout entier naturel n, démontrer que $u_n < \sqrt{2} < v_n$.*
   b) Démontrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.
   c) Justifier que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $v_n - u_n$.
   d) En déduire que les suites u et v sont adjacentes et convergent vers $\sqrt{2}$.
5. *A partir de quelle valeur de n, l'encadrement $u_n < \sqrt{2} < v_n$ a-t-il une amplitude inférieure à 10^{-6} ?*

DEVOIR MAISON
Méthode 4 : Le format.

On se propose d'approcher $\sqrt{2}$ à l'aide d'une suite de nombres rationnels définis par l'algorithme géométrique suivant . Partant du rectangle $OA_0B_0C_0$ de dimensions 1 et 2 (on le note R_0), on construit extérieurement le carré $B_0D_0C_1C_0$ puis le carré $A_0A_1B_1D_0$ pour obtenir le rectangle $OA_1B_1C_1$ (noté R_1) et ainsi de suite….
Pour tout entier naturel n, on note respectivement L_n et l_n la longueur et la largeur du rectangle R_n.

On appelle format de R_n et on le note x_n le rapport $\frac{L_n}{l_n}$



1- Approche :

a) A l'aide du dessin, déterminer x_0 , x_1 , x_2 .

b) Le rectangle R_n étant donné, construire le rectangle R_{n+1} . Exprimer les dimensions L_{n+1} et l_{n+1} du rectangle R_{n+1} en fonction des dimensions L_n et l_n du rectangle R_n .

c) En déduire x_3 , x_4 , x_5 .

d) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près des six premiers termes de la suite (x_n) . Classer ces nombres dans l'ordre croissant et les comparer à $\sqrt{2}$.

e) Exprimer le format x_{n+1} en fonction du format x_n.

2- Etude de la suite x.

La suite x est définie par $x_0 =2$ et pour tout entier n , $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $f(x) =1 + \frac{1}{x+1}$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel x_n est un rationnel strictement positif (c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et entiers positifs, q non nul).

b) * Montrer que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

* Démontrer que pour tout entier naturel : si $x_n > \sqrt{2}$ alors $x_{n+1} < \sqrt{2}$
et si $x_n < \sqrt{2}$ alors $x_{n+1} > \sqrt{2}$.

c) *Vérifier que pour tout entier naturel $x_{n+2} = \frac{3x_n +4}{2x_n +3}$.

et que $x_{n+2} - x_n = \frac{2 (\sqrt{2} - x_n) (\sqrt{2} + x_n)}{2x_n +3}$.

* Démontrer que pour tout entier naturel : si $x_n > \sqrt{2}$ alors $x_{n+1} < x_n$
et si $x_n < \sqrt{2}$ alors $x_n > x_{n+1}$.

* Déduire des questions précédentes que $x_1 < x_3 < x_5 \ldots < \sqrt{2} < \ldots x_4 < x_2 < x_0$

Que dire des suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) ?

d) * Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_{n-1} - x_n}{(x_n + 1)(x_{n+1} + 1)}$.

* Justifier que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{9} \leq \dfrac{1}{(x_n+1)(x_{n+1}+1)} \leq \dfrac{9}{49}$.

* En déduire que pour tout entier naturel n, $|x_{n+1}-x_n| \leq \dfrac{9}{49} |x_n-x_{n-1}|$ puis que

$|x_{n+1}-x_n| \leq (\dfrac{9}{49})^{n+1} |x_1-x_0|$.

* Démontrer que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes et tendent vers la même limite l.

* Justifier que $l = 1+\dfrac{1}{l+1}$. En déduire que $l = \sqrt{2}$.

3- Utilisation de la calculatrice.

A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle valeur de n l'encadrement $x_{2n+1} < 2 < x_{2n}$ a-t-il une amplitude inférieure à 10^{-6} ?