Interpolation linéaire

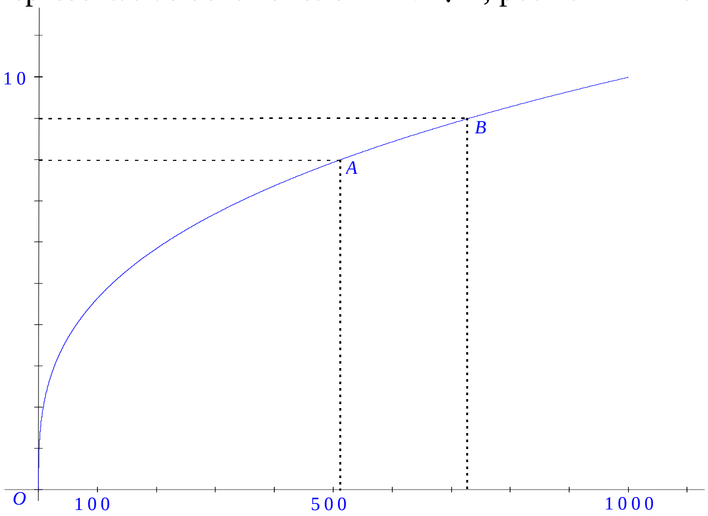
I) Etude d'un exemple

On se propose de trouver une valeur approchée de $\sqrt[3]{620}$.

1) Calculer n^3 pour n entier compris entre 3 et 10.

En déduire un encadrement de 620 par les cubes de deux entiers consécutifs.

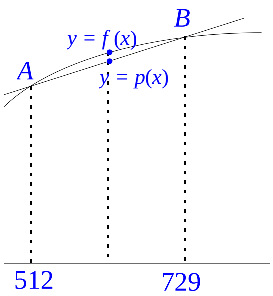
L'allure de la courbe (C), représentative de la fonction $x \to \sqrt[3]{x}$, pour $0 \le x \le 10$ est donnée ci-dessous.



Cette courbe passe par les points $A(512;8)$ et $B(729;9)$.

Le problème posé revient à trouver une approximation de $f(620)$ et, graphiquement, on constate que $8 < f(620) < 9$, ce qui donne déjà une valeur approchée par défaut à l'unité près.

Pour améliorer cette approximation, on considère la fonction affine p dont la droite (AB) est la courbe représentative.



Montrer que p est définie par $p(x) = \dfrac{x - 512}{217} + 8$.

On prend $p(620)$ pour valeur approchée de $f(620)$, vérifier que $p(620) \approx 8{,}50$ à 10^{-2} près.

2) Calculer $\sqrt[3]{620}$ avec votre calculatrice, en utilisant la touche y^x.

En déduire la précision de l'approximation faite en prenant 8,50 pour valeur approchée de $\sqrt[3]{620}$.

II) Méthode

La méthode utilisée ci-dessus est appelée **interpolation linéaire**, elle consiste, pour tout x d'un intervalle $[x_1,x_2]$, à prendre pour valeur approchée de $f(x)$ le nombre $p(x)$ où p est la fonction affine définie par :

$$p(x_1) = f(x_1) \text{ et } p(x_2) = f(x_2)$$

III) Exemples

- Utiliser cette méthode pour trouver une valeur approchée de $\sqrt[3]{1012}$.

On commencera par remarquer que $10^3 < 1012 < 11^3$

- Même question pour $\sqrt[3]{829}$ en remarquant que $5^4 < 829 < 6^4$.