Implication - Equivalence

La base d'un raisonnement

Tout théorème a pour articulation :

Si on sait que ... **alors on a** ...

Toute question d'un problème se présente sous la forme :

Sachant que ... **montrer que** ...

Trouver ... **tel(s) que** ...

La phrase qui suit "Si on sait que" ou "Sachant que" est l'**hypothèse**, celle qui suit "alors on a" ou "montrer que" en est la **conclusion**.

Cette structure de base est appelée une implication.

Voici quelques variantes de la formulation d'une implication :

SI hypothèse **ALORS** conclusion

SI hypothèse **DONC** conclusion

SI hypothèse **ENTRAÎNE** conclusion

SI hypothèse **IMPLIQUE** conclusion

Exemples

"Si x est réel et $0 \leq x \leq 2$ alors $x^2 \leq 4$" est une propriété vraie.

"Si *ABC* est un triangle rectangle, alors il est isocèle" est une propriété fausse.

On remarque ainsi qu'une implication peut être vraie ou fausse alors qu'un théorème (ou une propriété) est une implication qui est vraie et dont on peut se servir pour traiter d'autres problèmes.

Un problème a pour objet de montrer, à l'aide des théorèmes du cours, qu'une implication est vraie.

Inverser hypothèse et conclusion

Pour varier la rédaction, l'implication est parfois écrite à l'envers :

On a conclusion **Parce que** hypothèse

On a conclusion **Car** hypothèse

Equivalence

Si A et B sont des propositions, il se produit souvent que les implications "Si A alors B" et "Si B alors A" sont vraies toutes les deux. On dit alors que "A **équivaut** à B" et on écrit $A \Leftrightarrow B$.

On énonce également : "A **si et seulement si** B"

ou "**Pour que** A, **il faut et il suffit que** B"

Exemples :

Considérons les propositions (A), (B) et (C) dans lesquelles a et b désignent deux nombres réels :

(A) : $a + b = 0$ (B) : $a = 0$ et $b = 0$ (C) : $a = -b$

⌧ Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $a + b = 0$. On a $(B) \Rightarrow (A)$

Il peut arriver que l'on ait $a + b = 0$ sans pour autant avoir $a = 0$ et $b = 0$.

En effet, en prenant $a = 1$ et $b = -1$, on a bien $a + b = 0$ et on n'a pas $a = 0$ et $b = 0$. (A) n'implique pas (B).

⌧ Par contre, si $a = -b$ alors $a + b = 0$.

Réciproquement, si $a + b = 0$ alors $a = -b$.

Les propositions (A) et (C) sont équivalentes : $(A) \Leftrightarrow (C)$

Exercices

Dans chacun des cas suivants, on donne deux propositions (A) et (B). Dites si elles sont équivalentes et, si elles ne le sont pas, laquelle implique l'autre.

(vous pourrez utiliser des contre-exemples)

1) (A) : $a^2 + b^2 = 0$ et (B) : $a = b$

2) (A) : $|a| + |b| = 0$ et (B) : $|a + b| = 0$

3) (A) : $a^2 \leq b^2$ et (B) : $0 \leq a \leq b$

4) (A) : $\sqrt{x + 2} \geq |3 - x|$ et (B) : $x + 2 \geq (3 - x)^2$

5) (A) : $2x^2 \leq 1$ et (B) : $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Démontrer, dans chaque cas, que les propositions données sont équivalentes :

1) $(x-1)^2+(y+2)^2=0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ et } y=-2)$

2) Soit un nombre réel a positif ou nul.

$a \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow a \leq 1$

3) Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC sont confondus.

Résolution des équations

On résout une équation en effectuant des transformations successives sur l'équation données. On indique par le symbole d'équivalence que deux équations successives ont les mêmes solutions.

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $(x-1)(x-2)=0$

2) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$

3) $\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$

4) $\sqrt{x+2}=3$