ALGORITHME BABYLONIEN DE CALCUL D'UNE RACINE CARREE

1) Dans une tablette babylonienne célèbre (Yale Collection n°7289) on peut lire (après tanscription en base 10, puisque l'original est rédigé en base 60) l'équivalent de : $\sqrt{2} = 1{,}414222$, valeur qui ne diffère que de 0,000008 de la vraie valeur : $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$.

L'extraordinaire est qu'il fallut attendre la Renaissance pour en avoir une meilleure approximation !

Comment s'y sont-ils pris ?

2) Pour calculer $\sqrt{a}$, par exemple $\sqrt{2}$:

Prenons en une première approximation : a_1 soit $a_1 = 1{,}6$

Choisissons comme seconde approximation : $b_1 = \dfrac{a}{a_1}$ soit $b_1 = \dfrac{2}{1{,}6} = 1{,}25$.

Si a_1 est trop petite, alors b_1 sera trop grande et vice-versa, donc une approximation meilleure sera donnée par la moyenne : $c_1 = \dfrac{1}{2}(a_1 + b_1)$ soit $c_1 = \dfrac{1}{2}(1{,}6 + 1{,}25) = 1{,}425$.

Et on recommence en prenant la valeur c_1 pour a_1. Cet algorithme à l'avantage de ''converger'' très vite.

3) Utilisez la méthode des Babyloniens pour calculer une approximation décimale à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{10}$.

4) L'algorithme expliqué au 2) pour calculer $\sqrt{a}$, que l'on appelle parfois algorithme de Héron (Héron d'Alexandrie, 1er siècle de notre ère) car celui-ci l'a expliqué dans son principal ouvrage : ''les métriques'', peut se traduire par les formules :

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}) \qquad x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{a}{x_2}) \qquad \ldots \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

Nicolas Artavas de Rhabdas (qui vivait en 1341) procédait, lui, selon la formule suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

C'est-à-dire qu'en choisissant une valeur approchée de départ : x_1 (par exemple pour calculer $\sqrt{3}$, il partait de x_1=2 dont le carré est le plus voisin de 3) il calculait :

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - a}{2x_1} \quad \text{soit} \quad x_2 = 2 - \frac{4-2}{4} = \frac{7}{4}$$

puis $x_3 = x_2 - \dfrac{x_2^2 - a}{2x_2}$.

Suivez cette méthode pour calculer $\sqrt{2}$ et $\sqrt{10}$.

Comparez avec les différents résultats du 3).

Que remarquez-vous ?

(vous pourrez comparer les deux formules $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n}$)

5) Al-Karhi (X^{e} siècle) utilisait un autre algorithme : $x_{n+1} = x_n + \dfrac{a - x_n^2}{2x_n + 1}$ en partant d'une approximation par défaut de $\sqrt{a}$.

Refaîtes le calcul de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{10}$ en suivant cet algorithme et compare avec les résultats précédents.