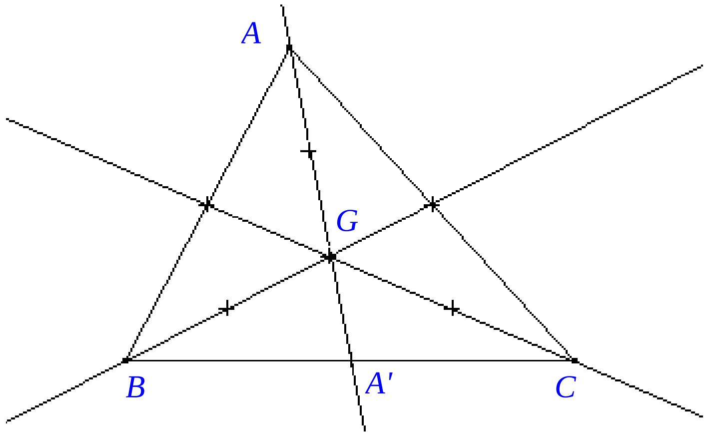
Chapitre II
Configurations du plan

<u>I Dans un triangle</u>

1) Médiane

(AA') est la médiane issue de A relative au côté [BC].
Le <u>centre de gravité</u> G est le point de concours des médianes du triangle ABC.

$$GA' = \frac{1}{3}AA' \quad \text{et} \quad AG = 2\,GA'$$

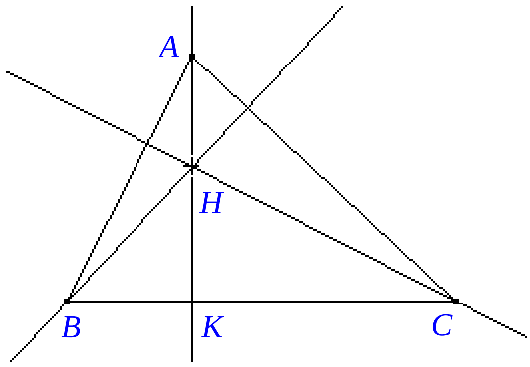


<u>Exercices</u>

a) Construire un triangle ABC de base AB = 6 cm et dont le centre de gravité G soit tel que : AG = 4 cm et CG = 4 cm. Justifier la construction.
Quelle est la nature du triangle ABC ?
b) Construire, sans justification, un triangle TRI tel que la médiane issue de T "mesure" 6 cm, celle issue de R 4,8 cm, et qui ait pour côté RI = 7 cm.

2) Hauteur

La droite (AK) est la <u>hauteur</u> issue de A relative à la base [BC].
K est le projeté orthogonal de A sur [BC].
L'orthocentre H est le point de concours des hauteurs du triangle.

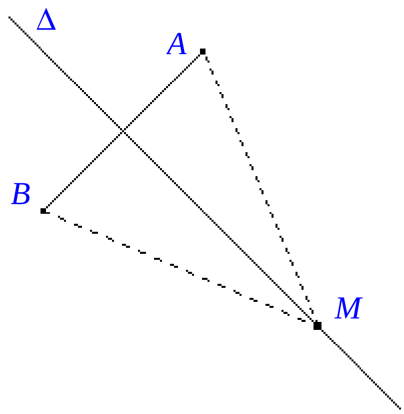


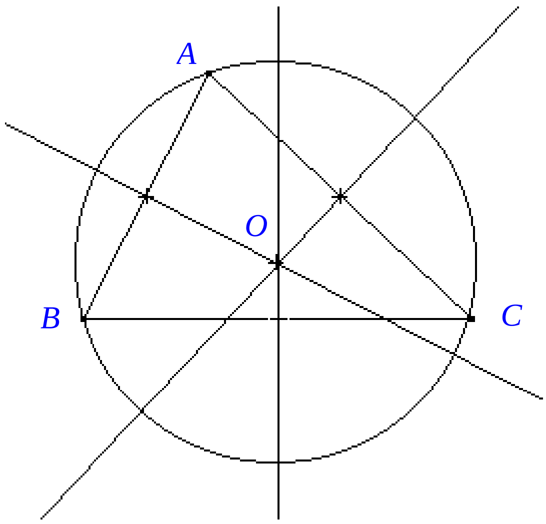
<u>Exercices</u>

c) Construire un triangle ABC tel que l'angle en A mesure 70° et l'orthocentre H soit situé à 1,5 cm de (AB) et 2 cm de (AC).
d) Construire, sans justification, un triangle ABC de base fixe BC = 6 cm, sachant que le point K, pied de la hauteur issue de A, est situé à 2 cm de B, et l'orthocentre H à 1,5 cm de la droite (BC).

3) Médiatrice

La droite Δ est la <u>médiatrice</u> du segment [AB] : $MA = MB$
Si $MA = MB$ alors M est un point de la médiatrice de [AB]

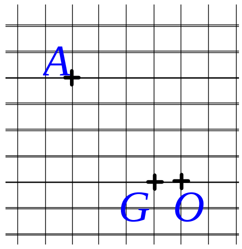




Le <u>centre du cercle circonscrit</u> O est le point de concours des médiatrices des côtés du triangle $OA = OB = OC$.
Par trois points du triangle, il ne passe qu'un seul cercle.

Exercices

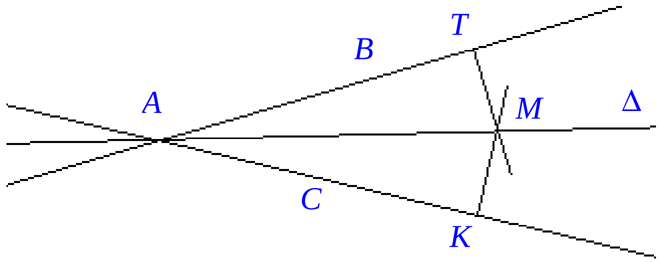
e) Placer les points A, O, G comme ci-contre dans un quadrillage d'unité 1 cm.
Construire le triangle ABC dont O est le point de concours des médiatrices et G le centre de gravité.

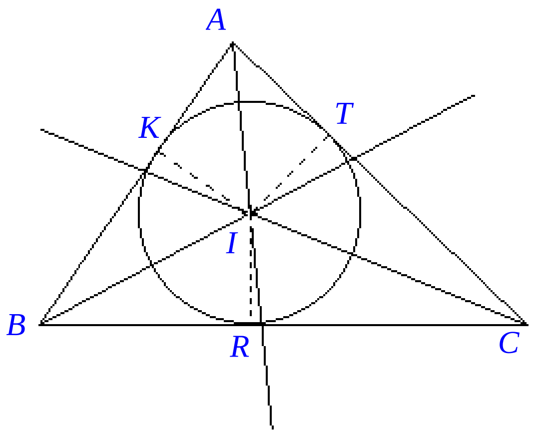


f) " Soit ABC un triangle et C son cercle circonscrit "
Comment tracer rapidement une telle situation ?

4) Bissectrice

La droite Δ est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$
Si un point est situé à égale distance des côtés d'un angle, alors ce point est sur la bissectrice de l'angle : $MT = MK$





Le centre du cercle inscrit I est le point de concours des bissectrices des angles du triangle : $IK = IT = IR$.

Exercice

g) Deux départementales D_1 et D_2 se coupent suivant un angle de 70°.
Sur la départementale D_1, à 25 m du croisement, se trouve un arbre et sur la départementale D_2, à 18 m du croisement, se trouve une borne.
On désire placer un panneau publicitaire à égale distance de l'arbre et de la borne et à égale distance des deux départementales.

Faire un schéma représentatif à l'échelle $\frac{1}{500}$.

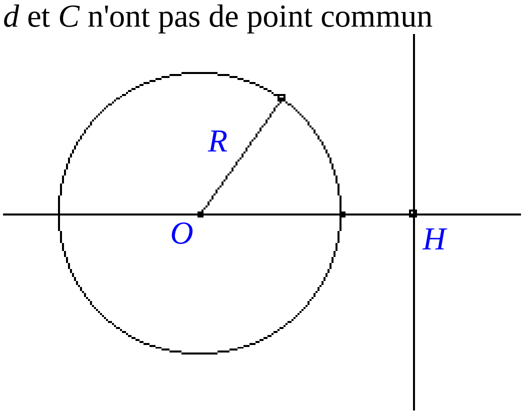
Construire l'emplacement du panneau sur ce schéma.

II Cercle et droite

Soit le cercle $C(O;R)$ et la droite d. On note H le projeté orthogonal de O sur d. La distance OH est la distance de O à H. On distingue trois cas :

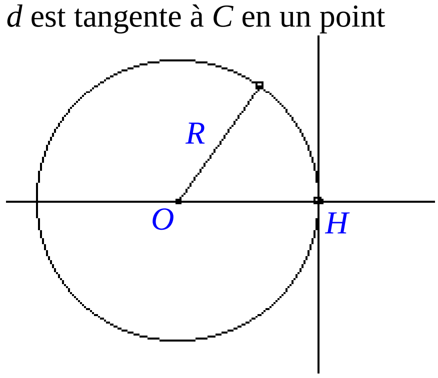
1^er^ cas : $OH > R$

d et C n'ont pas de point commun



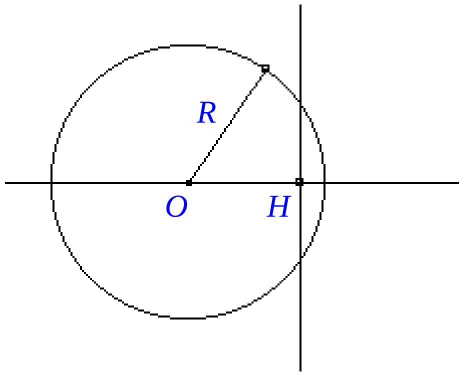
2^ème^ cas : $OH = R$

d est tangente à C en un point



3$^{\text{ème}}$ cas : $OH < R$

d est sécante à C en deux points



Définition

La tangente d en H à un cercle de centre O est la droite perpendiculaire en H au rayon $[OH]$. OH est la distance de O à cette droite.

Exercice

Soit $C(O;R)$ et A un point quelconque extérieur au disque.

Tracer les tangentes à C passant par A.

Exercice

h) Dans ce problème, on note $\overset{\frown}{ABC}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Trois cercles de même rayon et passant par un point H se coupent deux à deux en trois autres points A, B et C. On considère les points D, E et F diamétralement opposés au point H sur les cercles $\overset{\frown}{HBC}$, $\overset{\frown}{HAC}$ et $\overset{\frown}{HAB}$ respectivement.

1) Que représente le point H pour le triangle DEF ?

2) Que dire du cercle $\overset{\frown}{DEF}$ par rapport aux trois cercles de même rayon ?

3) Que représente le point A pour le segment $[EF]$?

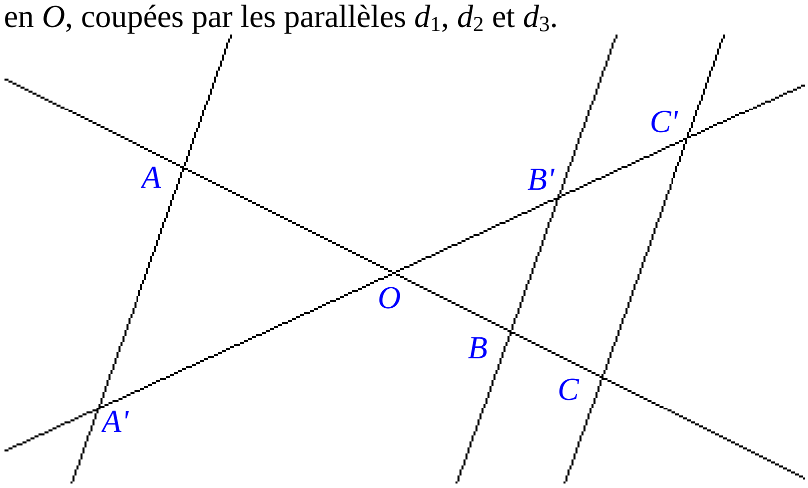
Quelles conclusions analogues peut-on faire ?

4) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

III Situation de Thalès

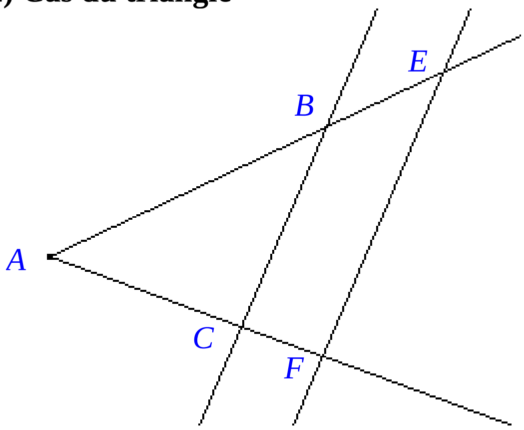
1) Reconnaissance

On reconnaît une situation de Thalès lorsque des droites parallèles coupent des sécantes. Soient Δ et Δ' deux droites sécantes en O, coupées par les parallèles d_1, d_2 et d_3.



Alors $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{OC'}{OC} = \dots$

2) Cas du triangle

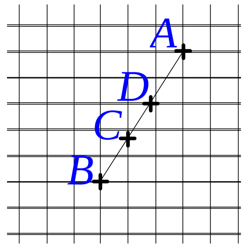


Si les droites (EF) et (BC) sont parallèles, alors les côtés du triangle AEF sont dans les mêmes proportions que les côtés du triangle ABC.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

<u>Exercices</u>

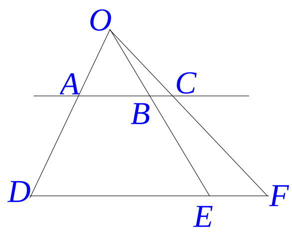
i) Un quadrillage présente deux séries de parallèles de direction verticale ou horizontale.

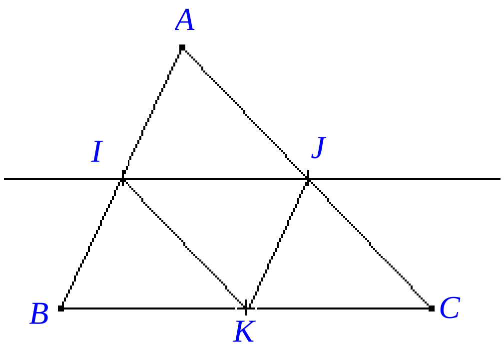


Déterminer les rapports :

$$\frac{AD}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{DC}{AB} \text{ et } \frac{DC}{CA}$$

j) Dans la figure ci-contre, les droites (AC) et (DF) sont parallèles.
$BC = 3$ et $DE = 12$
$AB = EF = x$.
Calculer x.



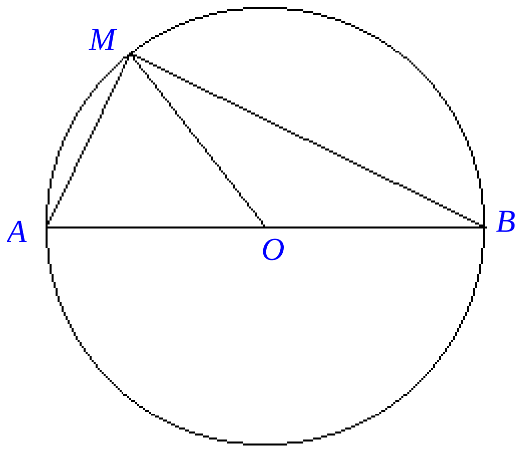


3) Droite des milieux

La droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et on a $IJ = \frac{1}{2}BC$

<u>IV Triangle rectangle</u>

1) Caractérisation



Soit [AB] le diamètre d'un cercle C et M un point de C.
Alors le triangle ABM est rectangle en M.

<u>Conséquence</u>

Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse : $IA = IB = IM$

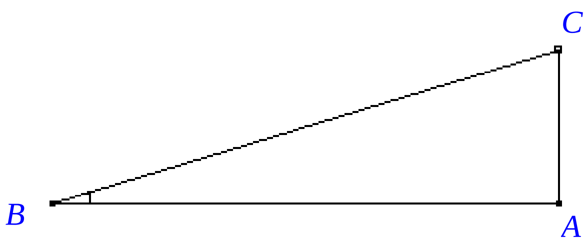
<u>Exercice</u>

k) Soit ABC un triangle et I le milieu du côté [AB].
Construire les hauteurs de ce triangle sans équerre, à l'aide de la règle et d'un seul coup de compas.

2) Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés :

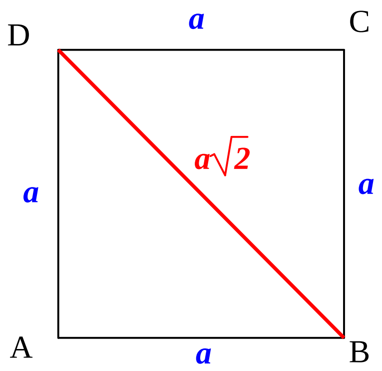
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

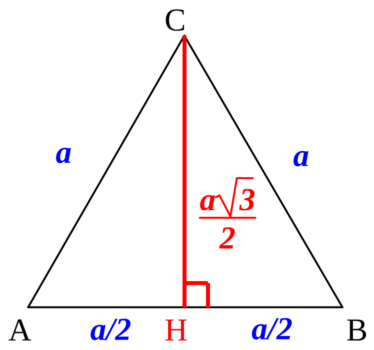


Deux résultats importants :

La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$

Une hauteur d'un triangle équilatéral de côté a a pour longueur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$





3) Réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle, si la somme des carrés de deux côtés est égale au carré du troisième alors le triangle est rectangle.

Exercice

l) Déterminer la nature du triangle MNP tel que $MN = 3$, $MP = 2\sqrt{5}$ et $NP = \sqrt{11}$

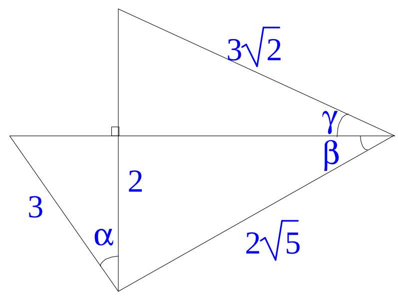
4) Lignes trigonométriques

Dans un triangle ABC rectangle en A et $\alpha = \widehat{ABC}$

$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ $\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ $\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

<u>Exercice</u>

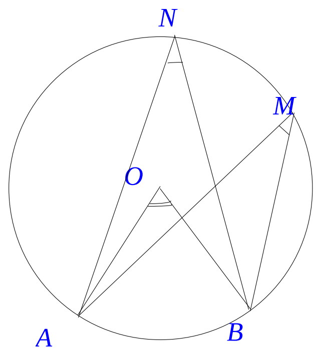
m) A l'aide des touches $\cos^{-1}$ et $\sin^{-1}$ de la calculatrice, donner la valeur arrondie au degré près des angles de la figure ci-contre.



V) Angles inscrits dans un cercle

Propriété 1

Dans un cercle, la mesure d'un angle au centre est le double de celle d'un angle inscrit interceptant le même arc : $\widehat{AOB} = 2\times\widehat{AMB}$

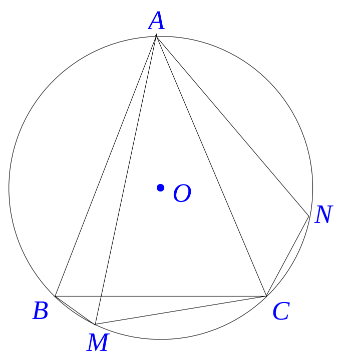


Propriété 2

Deux angles inscrits dans un même cercle qui interceptent le même arc ont même mesure : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

Remarque

Lorsque l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est plat, c'est-à-dire lorsque [*AB*] est un diamètre, la propriété 1 énonce que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est droit. Autrement dit, le triangle *AMB* est rectangle en *M*.



Exercices

n) Dans la figure ci-contre, *ABC* est un triangle équilatéral.

Calculer les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ANC}$.

Remarque : que deviennent les mesures de deux angles inscrits dans un même cercle qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsque les sommets de ces deux angles sont de part et d'autre de [*AB*] ?

o) Deux cercles se coupent en *A* et *B*.
On trace les diamètres [*AE*] et [*AF*] de ces deux cercles.
Est-ce que la droite (*EF*) passe par *B* ?

p) Les deux cercles ci-contre sont tangents en *D*. Les droites (*BF*) et (*CG*) passent par *D*.

Comparer les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FEG}$.