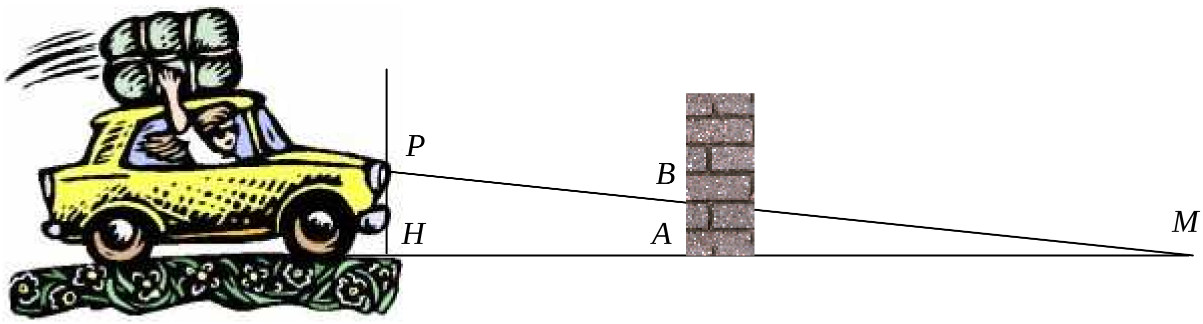
Devoir Seconde

Sécurité routière : réglage des feux de croisement d'une automobile
On envisage de régler rapidement, mais avec précision, les feux de croisement d'une automobile.
Pour cela, on place le véhicule face à un mur vertical. Le phare est identifié à un point P, la distance entre le sol et le phare est HP.
On considère que le phare émet un rayon lumineux dirigé vers le sol. En l'absence d'obstacle ce rayon atteindrait le sol en un point M ; il rencontre le mur en B.



La distance HM est appelée est appelée la portée du feu de croisement.
<u>Consignes de sécurité :</u>
On admet que cette portée doit, à la fois, être :
- d'au moins 30 mètres, afin d'éclairer suffisamment loin.
- d'au plus 45 mètres, pour ne pas éblouir les autres automobiles.

Le phare est à une hauteur PH = 0,60 m et la voiture est à une distance HA = 3 m du mur. On pose $AB = x$.
A quel intervalle doit appartenir le réel x pour que les consignes de sécurité soient respectées ?

Algorithme de Babylone ou Algorithme de Héron (Héron d'Alexandrie, 1er siècle de notre ère)
Une tablette d'Argile conservée à l'université d'Yale prouve que cette méthode était connue des Babyloniens. Elle a été attribuée à Archytas de Tarente vers 400 av. J.-C.
On peut lire dans cette tablette (après transcription en base 10, puisque l'original est rédigé en base 60) l'équivalent de : $\sqrt{2} \approx 1{,}414222$, valeur qui ne diffère que de 0,000008 de la vraie valeur : $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$
L'extraordinaire est qu'il fallut attendre la Renaissance pour en avoir une meilleure approximation !
Comment s'y sont-ils pris ?
Pour calculer $\sqrt{a}$, par exemple $\sqrt{2}$, prenons en une première approximation : a_1 soit $a_1 = 1{,}6$ (Cette première valeur peut être quelconque non nulle.)
Choisissons comme seconde approximation : $b_1 = \dfrac{a}{a_1}$ soit $b_1 = \dfrac{2}{1{,}6} = 1{,}25$.
Si a_1 est trop petite, alors b_1 sera trop grande et vice-versa, donc une approximation meilleure sera donnée par la moyenne : $c_1 = \dfrac{1}{2}(a_1 + b_1)$ soit $c_1 = \dfrac{1}{2}(1{,}6 + 1{,}25) = 1{,}425$.
Et on recommence en prenant la valeur c_1 pour a_2.
On a donc $a_2 = 1{,}425$ et $b_2 = \dfrac{a}{a_2} = 1{,}4035...$ puis $c_2 = \dfrac{1}{2}(a_2 + b_2) = 1{,}41425...$
On répète le processus jusqu'à obtenir deux valeurs consécutives suffisamment proches et respectant la précision voulue. Cet algorithme à l'avantage de "converger" très vite.

Utilisez la méthode des Babyloniens pour calculer une approximation décimale à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{5}$ (Vous devez considérer ici que vous n'en connaissez pas la valeur puisque vous la recherchez !).
Proposer un algorithme sur Algobox ou un programme sur votre calculatrice ou sur un tableur afin d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{3}$ par cet algorithme (indiquez ce que vous avez fait par une capture d'écran ou une recopie des données).
Facultatif : Interprétez géométriquement le fonctionnement de cet algorithme de Babylone.