Un algorithme de calcul de cos *x*

L'objet de cette activité est la mise au point d'un algorithme donnant des valeurs approchées de cosinus d'angles exprimés en radians.

A Calcul de cos *x* pour les petites valeurs de *x*

Utiliser la calculatrice pour vérifier que, lorsque *x* est exprimé en radians et est voisin de 0, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

On pourra (selon le type de calculatrice utilisée) :
- construire un tableau de valeurs
- Utiliser une tabulation de la machine (sur TI 82, par exemple, Y1=cosX, Y2=1-X²/2, Y3=Y1-Y2, TblMin=0, ΔTbl=0.1 ; puis changer de tabulation).
- Représenter graphiquement les fonctions $x \to \cos x$ et $x \to 1 - \frac{x^2}{2}$ (fenêtre d'affichage : Xmin=0, Xmax=1.7, Ymin=0, Ymax=1.2) et utiliser la touche trace pour apprécier les différences des valeurs des images d'un même nombre réel *x*.

B Mise au point d'un algorithme

Si nous connaissons le cosinus d'un angle *x*, la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ nous permet de calculer facilement le cosinus de 2*x*. En réutilisant la formule, nous pourrons obtenir, successivement, $\cos 4x$, $\cos 8x$, $\cos 16x$, ...

Aussi, si nous cherchons le cosinus d'un angle α, exprimé en radians, partageons-le en 2, puis partageons $\frac{\alpha}{2}$ en 2, ..., jusqu'à ce que l'angle obtenu soit suffisamment petit pour utiliser l'approximation : $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.
Ensuite, en "remontant", nous calculerons de proche en proche des valeurs approchées de $\cos 2x$, $\cos 4x$, ... puis $\cos \frac{\alpha}{2}$ et $\cos \alpha$.

L'angle $x = \frac{\alpha}{2^n}$ choisi dépend du nombre de chiffres significatifs fourni par la machine et doit permettre d'effectuer des calculs avec une précision suffisante. Pour ces raisons, nous choisissons le plus petit entier naturel *n* tel que $\frac{\alpha}{2^n} < 10^{-4}$.

Nous nous proposons de chercher, par ce procédé, une valeur approchée de cos 0,1, plus précise que celle donnée par $\cos 0{,}1 \approx 1 - \frac{0{,}1^2}{2}$.

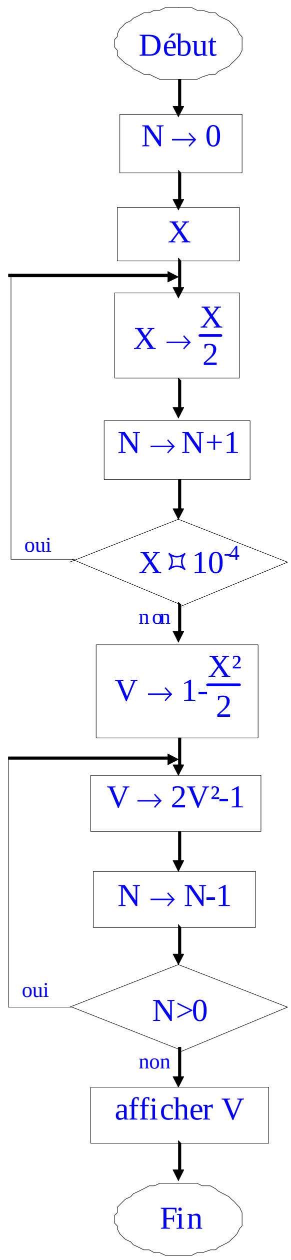
1) Vérifier que le plus petit entier *n* tel que $\frac{\alpha}{2^n} < 10^{-4}$ est 10.

2) Déterminer une valeur approchée de $\cos \frac{0{,}1}{2^{10}}$ avec la formule donnée dans la partie A.

3) Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ pour calculer $\cos \frac{0{,}1}{2^9}$ en utilisant la valeur trouvée précédemment.

4) Calculer successivement, avec la même formule, des valeurs approchées de $\cos \frac{0{,}1}{2^8}$, $\cos \frac{0{,}1}{2^7}$, ..., $\cos \frac{0{,}1}{2}$ et $\cos 0{,}1$ (sur la calculatrice, utiliser la touche ANS et ENTER ou EXE).

5) Comparer le résultat obtenu à la valeur de cos 0,1 affichée par une calculatrice scientifique (placer celle-ci en mode radian).



C Elaboration d'un programme

1) Expliquer, à la lumière des calculs de la partie B, chaque étape de l'organigramme ci-contre.
2) S'inspirer de l'organigramme pour programmer la calculatrice.

3) Utiliser ce programme pour calculer des valeurs approchées de cos 0,1 ; cos 0,5 ; cos 0,3 ; $\cos \frac{\pi}{3}$; $\cos \frac{\pi}{2}$; $\cos \pi$; cos 14.