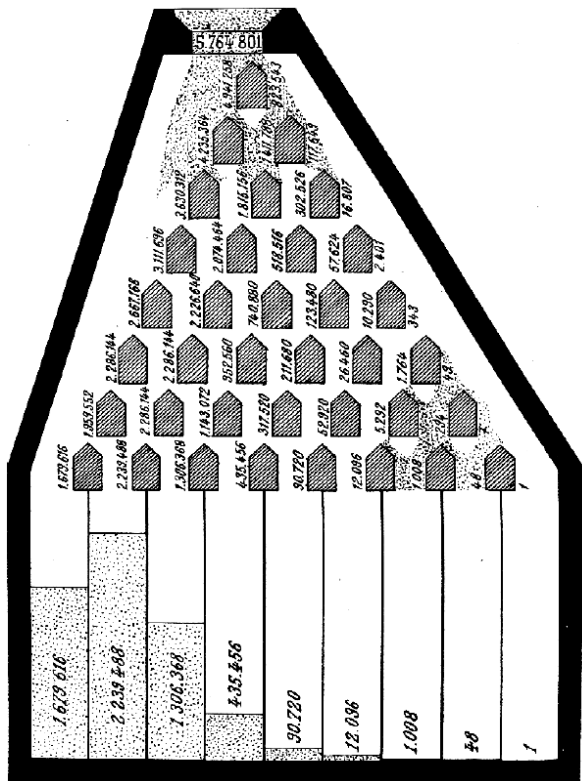


La "planche de Galton" est une illustration physique de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale. Galton éprouva le besoin d'imaginer et de faire réaliser des procédés physiques pour comprendre les propriétés de la loi normale.

Lucien March, introducteur en France de la statistique mathématique anglaise, nous décrit l'instrument dans son ouvrage "Les principes de la méthode statistique", paru en 1930.

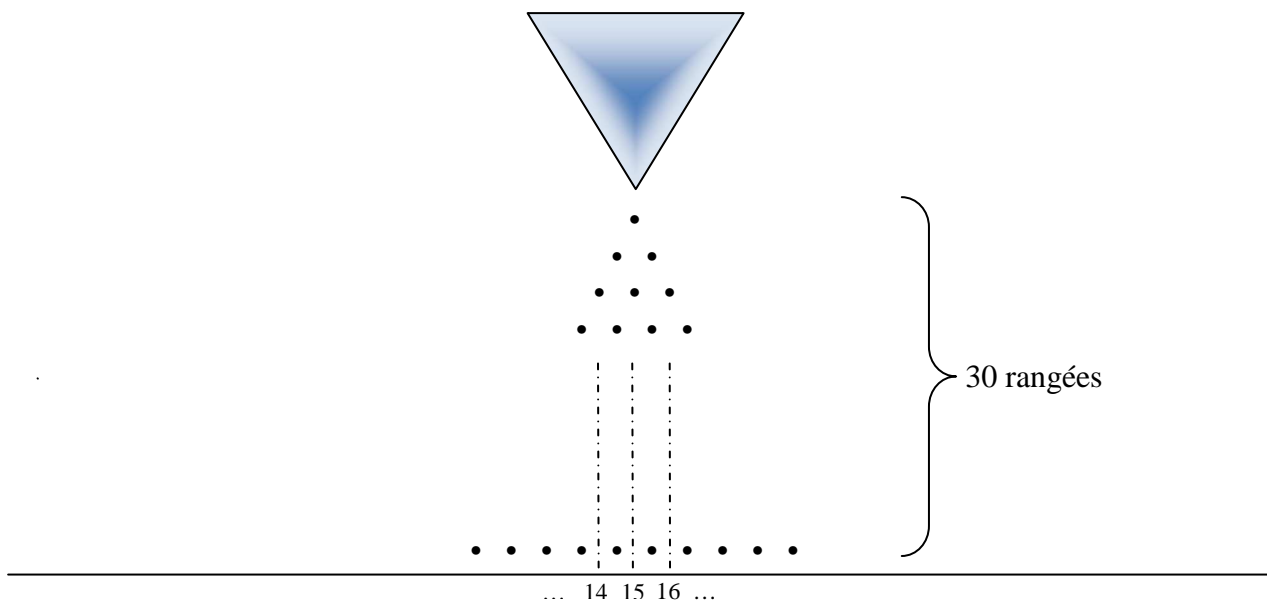
"La concentration des effets de l'association de séries primaires [il s'agit du théorème limite central] peut être réalisé mécaniquement dans un appareil fort simple, analogue à cet ancien jouet dans lequel une bille descend à travers un quinconce de clous pour finir par se poser dans une case numérotée qui indique le gain du jeu. Cet appareil est figuré ci-après. Il comprend une trémie débouchant au-dessus d'un prisme dont l'arête partage l'orifice de la trémie dans une proportion donnée [cette proportion est de 6/7 sur la figure], de sorte que des grains, des grains de sable par exemple, jetés dans la trémie se répartissent de chaque côté du prisme dans la proportion fixée sur l'autre face du prisme."

Puisqu'il y a 8 rangées de prismes et qu'un grain de sable a, pour chaque prisme rencontré, 6 chances sur 7 d'aller à gauche, la répartition s'effectue selon le modèle de la loi binomiale  $B(8 ; 1/7)$ . En augmentant le nombre de rangées, on se trouvera dans les conditions d'approximation par la loi normale et l'on mettrait ainsi en évidence le "profil" de la courbe de Gauss en utilisant le théorème limite central.



## Construction sur tableur des résultats d'une planche de Galton à 30 rangées

Considérons la rangée centrale d'abscisse de coordonnées 15 au dessus de la droite des réels. A chaque prisme rencontré, il y a 6 chances sur 7 d'aller à gauche et 1 chance sur 7 d'aller à droite. Lorsqu'un grain de sable bascule à gauche, son abscisse au dessus de la droite des réelles diminue de 0,5 et s'il bascule à droite, son abscisse augmente de 0,5.



- 1) Quel est l'ensemble des abscisses finales des grains de sable suite au passage des 30 rangées ?
- 2) a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de mouvements vers la droite d'un grain de sable lors de son passage dans la trémie.  
b) A l'aide du tableur, simuler une expérience et déterminer l'abscisse finale du grain de sable sur la droite des réels.  
Continuez la construction de votre feuille de calcul en simulant les trajets de 500 grains de sable. Terminez vos simulations par la construction du tableau des fréquences des réalisations pour les abscisses situées entre 0 et 30.
- 3) a) Sur la même feuille de calcul, construire la table des probabilités de la loi binomiale  $X$  de paramètres  $n = 30$  et  $p = 6/7$ .  
b) Construire sur un même graphique les diagrammes en bâton des fréquences obtenues par les simulations d'une part, et des probabilités de la loi binomiale d'autre part.  
Utiliser la touche F9 ou CTRL+MAJ+F9 pour visualiser le lien éventuel entre ces deux données.
- 4) a) Construire la table des probabilités cumulées de la loi binomiale  $X$  de paramètres  $n = 30$  et  $p = 6/7$ .  
b) Déterminer  $a$  et  $b$  tels que :
  - $a$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq a) > 0,025$  ;
  - $b$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq b) \geq 0,975$ .puis former l'intervalle de fluctuation à 95%,  $\left[ \frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ , obtenu à l'aide de cette loi binomiale.
- c) Mettre en évidence sur votre feuille de calcul, en changeant de couleur ou en mettant en gras, les valeurs de la loi binomiale situées en dehors de cet intervalle de fluctuation au seuil de 5%.  
Quel est le pourcentage de simulations dont la fréquence de mouvements sur la droite est située en dehors de l'intervalle de fluctuation au seuil de 5% ?