

Un test de dépistage

d'après Hyperbole, TS, Nathan, 2006.

Utilisation de $E(Y) = aE(X) + b$

Dépister une maladie par la méthode exhaustive (tous les individus d'une population sont testés individuellement) peut être très coûteux. C'est pourquoi on utilise parfois des tests groupes.

Considérons une population de 1 000 personnes dans laquelle on veut dépister une maladie dont on sait qu'elle touche statistiquement 1 % de la population. On considère que les individus sont touchés par la maladie de façon indépendante.

Méthode A : on effectue les 1 000 analyses individuelles.

Méthode B : on répartit les 1 000 individus en n groupes de r personnes (donc $n \times r = 1\,000$). Dans chaque groupe, on mélange les r prélèvements et on procède à une analyse du mélange, ce qui conduit donc à n analyses.

On peut alors obtenir un groupe négatif : aucun des membres du groupe n'est malade, ou un groupe positif, auquel cas on procède à une analyse individuelle pour les r personnes composant le groupe.



- 1) Étude du nombre de groupes positifs
 - a) Quelle est la probabilité qu'un groupe soit négatif ?
En déduire la probabilité qu'un groupe soit positif.
 - b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de groupes positifs.
Caractériser la loi de X et en déduire son espérance mathématique.
- 2) Étude du nombre total d'analyses à effectuer avec la méthode B
 - a) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses effectuées avec la méthode B.
Calculer l'espérance mathématique de Y .
 - b) On montre que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et t proche de 0, $(1 - t)^n \approx 1 - nt$. (vous pouvez vérifier ce résultat à l'aide de votre calculatrice ou d'un tableur).
En déduire que $1 - r$ est une valeur approchée de $0,99^r$, puis en utilisant cette valeur approchée, démontrer que $E(Y) \approx 10\left(r + \frac{100}{r}\right)$
- 3) Comparaison des deux méthodes
 - a) Étudier la fonction f définie sur $]0;1\,000]$ par $f(x) = 10\left(x + \frac{100}{x}\right)$ et dresser son tableau de variation.
 - b) Résoudre l'équation $f(x) = 1\,000$ et donner une valeur arrondie à l'unité des solutions.
À quoi correspondent les valeurs trouvées en ce qui concerne la comparaison des deux méthodes de dépistage ?
 - c) Résoudre $f(x) < 1\,000$ et en déduire les valeurs de r pour lesquelles la méthode B est moins coûteuse que la méthode A, et la valeur de r qui minimise le coût du dépistage.
 - d) La valeur de r qui minimise le coût du dépistage est-elle la même si la maladie touche 0,1 % de la population ?
Justifier.