# Les Probabilités

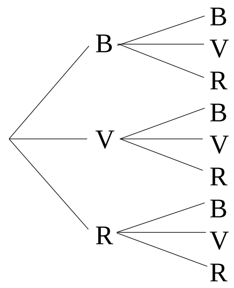
## I) Le vocabulaire des probabilités

### 1) Exemple

Une urne contient 3 boules : une bleue, une rouge, une verte. On tire au hasard une boule de cette urne, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne que l'on agite. On tire alors une deuxième boule de l'urne en notant sa couleur.

On dit que l'ensemble des opérations ainsi réalisées constitue une **épreuve** ou **expérience aléatoire**. On peut représenter l'ensemble des résultats possibles ou **éventualités** par un tableau ou un arbre :

| 1<br>2 | **B** | **V** | **R** |
|---|---|---|---|
| **B** | (B,B) | (V,B) | (R,B) |
| **V** | (B,V) | (V,V) | (R,V) |
| **R** | (B,R) | (V,R) | (R,R) |




### 2) Evénement

Considérons $\Omega$ = {(B,B);(B,V);(B,R);(V,B);(V,V);(V,R);(R,B);(R,V);(R,R)} l'**univers** ou **ensemble des éventualités** de cette expérience.

**L'événement** $A_1$ = {(B,B);(V,V);(R,R)} est l'événement "Obtenir 2 boules de même couleur"
$A_2$ = {(B,R);(B,V);(B,B)} est l'événement "Obtenir une boule bleue au premier tirage"

<u>Remarque</u>

Si une épreuve donne comme résultat (B,R), nous pouvons dire que l'événement $A_2$ est réalisé mais par contre $A_1$ ne l'est pas.

### 3) Evénement élémentaire

$A_3$ = {(B,B)} est l'événement "obtenir deux boules bleues".

C'est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité. On dit que c'est un **événement élémentaire**.

### 4) Evénement "A et B"

Considérons les événements $A_1$, $A_2$ et $A_3$ précédemment définis :

$A_1$ : "Obtenir 2 boules de même couleur"
$A_2$ : "Obtenir une boule bleue au premier tirage"
$A_3$ : "obtenir deux boules bleues".

Une épreuve étant accomplie, nous disons que l'événement $A_3$ est réalisé lorsque les événements $A_1$ et $A_2$ sont simultanément réalisés. L'événement $A_3$ est l'événement "$A_1$ et $A_2$", noté $A_1$ et $A_2$ mais aussi $A_1 \cap A_2$.

### 5) Evénement incompatible

Reprenons l'événement $A_2$ : "Obtenir une boule bleue au premier tirage" et soit $A_4$ = {(R,R)} : "obtenir deux boules rouges". Aucune éventualité ne réalise simultanément $A_2$ et $A_4$; on dit que $A_2$ et $A_4$ sont incompatibles et on note $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

<u>Remarque</u>

Les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles

### 7) Evénements contraires

Soit $A_1$ : "Obtenir 2 boules de même couleur". On note $\overline{A_1}$ l'événement contraire, c'est-à-dire "obtenir un tirage bicolore". On a $A_1$ = {(B,B);(V,V);(R,R)} et donc $\overline{A_1}$ = {(B,V);(B,R);(V,B);(V,R);(R,B);(R,V)}

Ainsi, si une épreuve est accomplie, l'un et l'un seulement des deux événements $A_1$ et $\overline{A_1}$ est réalisé.

## II) Probabilité

### 1) La notion de probabilité

Considérons l'épreuve suivante : elle consiste à lancer un dé ; l'univers associé est $\Omega$ = {1;2;3;4;5;6}. Notons $\{\omega_i\}$ l'événement élémentaire "obtenir le chiffre $i$", $1 \leq i \leq 6$

4 séries d'épreuves comportant 1 000, 5 000, 10 000 et 20 000 lancers ont été résumées pour l'apparition du chiffre 1 par le tableau ci-contre :

| Nombre de lancers | Nombre d'apparitions du chiffre 1 | Fréquence |
|---|---|---|
| 1 000 | 173 | 0,1730 |
| 5 000 | 844 | 0,1688 |
| 10 000 | 1 650 | 0,1650 |
| 20 000 | 3 320 | 0,1660 |

On remarque que les résultats sont très proches. On supposera, comme en physique, que l'on admet "une valeur exacte" (ou théorique) de la mesure.

Nous admettrons que la fréquence de $\{\omega_i\}$ est une valeur approchée d'un nombre réel compris entre 0 et 1 que l'on appelle la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ que l'on note $p(\{\omega_i\})$. Dans le cas présent, on supposera $p(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{6}$.

<u>Définition</u>

Soit $E$ une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

- A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est associé un nombre réel, **élément de [0;1]** appelé probabilité de l'événement élémentaire (représentation idéale de la fréquence) tel que : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$
- La probabilité de tout événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. En particulier, $p(\Omega) = 1$.
- Si $A = \varnothing$ alors $p(A) = 0$

## 2) <u>L'hypothèse d'équiprobabilité</u>

Supposons que tous les événements élémentaires soient tels que $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = ... = p(\{\omega_n\})$. On dit alors qu'ils sont équiprobables. L'égalité $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$ entraîne $p(\{\omega_n\}) = \dfrac{1}{n}$

Les mots "au hasard", "indiscernable au toucher", "bien équilibré", ... sous-entendent des expériences équiprobables.

<u>Propriété</u> (Formule de Laplace)

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le nombre total d'éventualités étant $n$, si un événement A est constitué de $m$ éventualités alors sa probabilité est $p(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{\text{effectif de A}}{\text{effectif de }\Omega} = \dfrac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nbre de cas favorables à A}}{\text{nbre de cas possibles}}$

## 3) <u>Propriétés des probabilités</u>

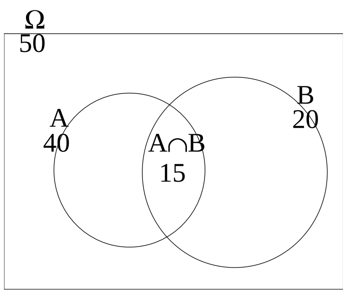
<u>Probabilité de la réunion de deux événements</u>

<u>Exemple</u>

Un sac contient un ensemble de 50 jetons de formes et de couleurs différentes. 20 sont ronds, 40 sont rouges et 15 sont à la fois ronds et rouges.

On tire au hasard un jeton du sac. Calculons la probabilité pour qu'il soit rond ou rouge.

Désignons par A et B les événements : A : "obtenir un jeton rouge" et B : "obtenir un jeton rond". On peut représenter la situation par le schéma ci-contre :




Par lecture du schéma, le nombre d'éléments de $A \cup B$ est 40 + 20 - 15 (on note $\text{Card}(A \cup B) = 40 + 20 - 15$)

et $p(\text{A ou B}) = \dfrac{(40 - 15) + 15 + (20 - 15)}{50} = \dfrac{40}{50} + \dfrac{20}{50} - \dfrac{15}{50} = p(A) + p(B) - p(\text{A et B})$

**<u>Propriété</u>**

**Si A et B sont deux événements quelconques alors $p(\text{A ou B}) = p(A) + p(B) - p(\text{A et B})$**

<u>Probabilité de la réunion de deux événements incompatibles</u>

Si A et B sont deux événements incompatibles, on a $A \cap B = \varnothing$ et $p(\text{A et B}) = 0$

Dans ce cas, $p(\text{A ou B}) = p(A) + p(A)$

<u>Conséquence</u>

Soit A un événement quelconque. A et $\overline{A}$ sont deux événements contraires donc $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

L'application directe de la dernière propriété donne $1 = p(\Omega) = p(\text{A ou } \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$.

Soit $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$