Les Probabilités

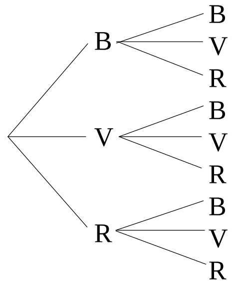
I) Le vocabulaire des probabilités

1) Exemple

Une urne contient 3 boules : une bleue, une rouge, une verte. On tire au hasard une boule de cette urne, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne que l'on agite. On tire alors une deuxième boule de l'urne en notant sa couleur.

On dit que l'ensemble des opérations ainsi réalisées constitue une **épreuve** ou **expérience aléatoire**. On peut représenter l'ensemble des résultats possibles ou **éventualités** par un tableau ou un arbre :

1 / 2	**B**	**V**	**R**
B	(B,B)	(V,B)	(R,B)
V	(B,V)	(V,V)	(R,V)
R	(B,R)	(V,R)	(R,R)



2) Evénement

Considérons Ω = {(B,B);(B,V);(B,R);(V,B);(V,V);(V,R);(R,B);(R,V);(R,R)} l'**univers** ou **ensemble des éventualités** de cette expérience.

L'événement A_1 = {(B,B);(V,V);(R,R)} est l'événement "Obtenir 2 boules de même couleur"

A_2 = {(B,R);(B,V);(B,B)} est l'événement "Obtenir une boule bleue au premier tirage"

Remarque

Si une épreuve donne comme résultat (B,R), nous pouvons dire que l'événement A_2 est réalisé mais par contre A_1 ne l'est pas.

3) Evénement élémentaire

A_3 = {(B,B)} est l'événement "obtenir deux boules bleues".

C'est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité. On dit que c'est un **événement élémentaire**.

4) Evénement "A et B"

Considérons les événements A_1, A_2 et A_3 précédemment définis : A_1 : "Obtenir 2 boules de même couleur"

A_2 : "Obtenir une boule bleue au premier tirage"

A_3 : "obtenir deux boules bleues".

Une épreuve étant accomplie, nous disons que l'événement A_3 est réalisé lorsque les événements A_1 et A_2 sont simultanément réalisés.

L'événement A_3 est l'événement "A_1 et A_2", noté A_1 et A_2 mais aussi $A_1 \cap A_2$.

$A_3 = A_1$ et A_2 = {(B,B)}

5) Evénement incompatible

Reprenons l'événement A_2 : "Obtenir une boule bleue au premier tirage" et soit A_4 = {(R,R)} : "obtenir deux boules rouges".

Aucune éventualité ne réalise simultanément A_2 et A_4; on dit que A_2 et A_4 sont incompatibles et on note $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

Remarque

Les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles

7) Evénements contraires

Soit A_1 : "Obtenir 2 boules de même couleur".

On note $\overline{A_1}$ l'événement contraire, c'est-à-dire "obtenir un tirage bicolore".

On a A_1 = {(B,B);(V,V);(R,R)} et donc $\overline{A_1}$ = {(B,V);(B,R);(V,B);(V,R);(R,B);(R,V)}

Ainsi, si une épreuve est accomplie, l'un et l'un seulement des deux événements A_1 et $\overline{A_1}$ est réalisé.

II) Probabilité

1) La notion de probabilité

Considérons l'épreuve suivante : elle consiste à lancer un dé ; l'univers associé est Ω = {1;2;3;4;5;6}. Notons $\{\omega_i\}$ l'événement élémentaire "obtenir le chiffre *i*", $1 \leq i \leq 6$

4 séries d'épreuves comportant 1 000, 5 000, 10 000 et 20 000 lancers ont été résumées pour l'apparition du chiffre 1 par le tableau ci-contre :

Nombre de lancers	**Nombre d'apparitions du chiffre 1**	**Fréquence**
1 000	173	0,1730
5 000	844	0,1688
10 000	1 650	0,1650
20 000	3 320	0,1660

On remarque que les résultats sont très proches. On supposera, comme en physique, que l'on admet "une valeur exacte" (ou théorique) de la mesure.

Nous admettrons que la fréquence de $\{\omega_i\}$ est une valeur approchée d'un nombre réel compris entre 0 et 1 que l'on appelle la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ que l'on note $p(\{\omega_i\})$. Dans le cas présent, on supposera $p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$.

Définition

Soit E une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

- A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est associé un nombre réel, **élément de [0;1]** appelé probabilité de l'événement élémentaire (représentation idéale de la fréquence) tel que : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$
- La probabilité de tout événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

En particulier, $p(\Omega) = 1$.

- Si A = $\emptyset$ alors $p(A) = 0$

2) L'hypothèse d'équiprobabilité

Supposons que tous les événements élémentaires soient tels que $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = ... = p(\{\omega_n\})$. On dit alors qu'ils sont équiprobables. L'égalité $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}) = 1$ entraîne $p(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$

Les mots "au hasard", "indiscernable au toucher", "bien équilibré", ... sous-entendent des expériences équiprobables.

Propriété

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le nombre total d'éventualités étant n, si un événement A est constitué de m éventualités alors sa probabilité est $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{effectif de A}}{\text{effectif de } \Omega} = \frac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables à A}}{\text{nbre de cas possibles}}$

3) Paramètres associés à une loi de probabilité

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ un ensemble de nombres représentatnt les issues d'une expérience aléatoire et $P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ une loi de probabilité sur E.

On appelle :

- espérance de la loi P le nombre $\mu = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i$
- variance de la loi P le nombre $V = \sum_{i=1}^{r} p_i (x_i - \mu)^2$
- écart-type de la loi P le nombre $\sigma = \sqrt{V}$

Ces paramètres sont les valeurs théoriques dans le modèle probabiliste, de paramètres statistiques : respectivement moyenne, variance et écart-type.

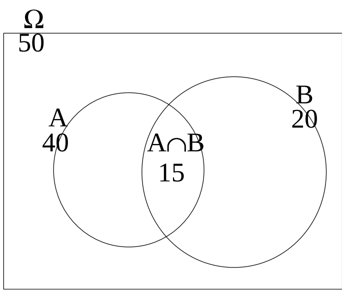
4) Propriétés des probabilités

Probabilité de la réunion de deux événements

Exemple

Un sac contient un ensemble de 50 jetons de formes et de couleurs différentes. 20 sont ronds, 40 sont rouges et 15 sont à la fois ronds et rouges.

On tire au hasard un jeton du sac. Calculons la probabilité pour qu'il soit rond ou rouge.



Désignons par A et B les événements :

A : "obtenir un jeton rouge" et B : "obtenir un jeton rond"

On peut représenter la situation par le schéma ci-contre :

Par lecture du schéma, le nombre d'éléments de A∪B est 40 + 20 - 15 (on note Card(A∪B) = 40 + 20 - 15)

$$\text{et } p(A \text{ ou } B) = \frac{(40 - 15) + 15 + (20 - 15)}{50} = \frac{40}{50} + \frac{20}{50} - \frac{15}{50} = p(A) + p(B) - p(A \text{ et } B)$$

Propriété

Si A et B sont deux événements quelconques alors $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ et } B)$

Probabilité de la réunion de deux événements incompatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$ et $p(A \text{ et } B) = 0$

Dans ce cas, $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(A)$

Conséquence

Soit A un événement quelconque. A et $\overline{A}$ sont deux événements contraires donc $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

L'application directe de la dernière propriété donne $1 = p(\Omega) = p(A \text{ ou } \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$.

Soit $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

III) Variable aléatoire

1) Définition. Exemple

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r\}$ est l'univers d'une expérience aléatoire sur lequel est définie une probabilité.

Une **variable aléatoire *X*** est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Notons $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les valeurs de X (en général, $q < r$).

L'événement "X prend la valeur x_i" est noté $X = x_i$ et sa probabilité p_i. L'événement $X = x_i$ est l'événement qui contient toutes les issues dont l'image par X est x_i.

Exemple : Chacun des mots de l'expression "par le plus grand des hasards" est inscrit sur un carton. On tire au hasard l'un des cartons et on considère la variable aléatoire X qui à chaque mot tiré associe le nombre de lettres de ce mot.

Ici, Ω est l'ensemble des six cartons ou des six mots. Un événement élémentaire est un mot, les événements élémentaires sont équiprobables (tirage au hasard). L'ensemble des valeurs de X est {2,3,4,5,7} et est noté $X(\Omega)$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	7
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ex : L'événement $X = 3$ contient deux éventualités provenant des deux mots "par" et "des".

2) Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_rp_r$

Variance : $V(X) = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_r - E(X)]^2 p_r = E(X^2) - [E(X)]^2$

Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Liens entre loi de probabilité et distribution de fréquences en statistique :

Distribution de fréquences sur $E = \{x_1, \ldots, x_r\}$	Loi de probabilité sur $E = \{x_1, \ldots, x_r\}$
$(f_1, \ldots, f_i)$	$(p_1, \ldots, p_r)$
$f_i \geq 0$; $\sum f_i = 1$	$p_i \geq 0$; $\sum p_i = 1$
$A \subset E$, fréquence de A : $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i$	$A \subset E$, probabilité de A : $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$
Événement complémentaire : $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$	Événement complémentaire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Événements A et B disjoints : $f(A \cup B) = f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$	Événements A et B disjoints : $P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$
Cas numérique :	Cas numérique :
Moyenne empirique : $\bar{x} = \sum f_i x_i$	Espérance d'une loi P : $\mu = \sum p_i x_i$
Variance empirique : $s^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$	Variance d'une loi P : $\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2$
Écart type empirique : $s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$	Écart type d'une loi P : $\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}$