

II) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS ET SENS DE VARIATION

1) Opérations

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g , et k un réel non nul.

opération	notation	définition	Définie pour :
fonction somme de la fonction f et du réel k	$f + k$	$x \rightarrow (f + k)(x) = f(x) + k$	$x \in D_f$
fonction produit de la fonction f par le réel k	kf	$x \rightarrow (kf)(x) = k \times f(x)$	$x \in D_f$
fonction somme des fonctions f et g	$f + g$	$x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
fonction produit des fonctions f et g	$f \times g$	$x \rightarrow (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
fonction inverse de la fonction f	$\frac{1}{f}$	$x \rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$	$x \in D_f$ et $f(x) \neq 0$
fonction racine de la fonction f	\sqrt{f}	$x \rightarrow (\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

Ex : On considère les fonctions $f: x \mapsto -x + 1$ définie sur \mathbb{R} et $g: x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^*

- $f + g$ est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $(f + g)(x) = -x + 1 + \frac{1}{x}$
- $f \times g$ est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $(f \times g)(x) = (-x + 1) \times \frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{x}$
- $5f$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par $(5f)(x) = 5(-x + 1) = -5x + 5$

2) Variations

Soit f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I et k un réel non nul.

▪ Les fonctions f et $f + k$ ont le même sens de variation sur I .
▪ Si $k > 0$, les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur I .
▪ Si $k < 0$, les fonctions f et kf ont des sens de variation contraire sur I .
▪ Si f et g sont strictement croissantes sur I , alors $f + g$ est strictement croissante sur I .
▪ Si f et g sont strictement décroissantes sur I , alors $f + g$ est strictement décroissante sur I .
▪ Si f garde un signe constant sur l'intervalle I avec $f(x) \neq 0$, alors les fonctions f et $\frac{1}{f}$ ont des sens de variation contraire sur I .
▪ Si f est positive ou nulle sur l'intervalle I , alors les fonctions f et \sqrt{f} ont le même sens de variation sur I .

Remarques :

- $f - g = f + (-g) \dots$
- Pour fg , il faut ajouter des hypothèses sur les signes de f et de g pour obtenir des résultats généraux.