Les transformations du plan

Transformations[1] usuelles

a) Translation

<u>Définition</u> : Le point M a pour image M' par la translation de vecteur $\vec{u}$ ($t_{\vec{u}} : M \rightarrow M'$) signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

<u>Point invariant</u> : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant (un point M est invariant par f s'il est confondu avec son image par f.)

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors tout point du plan est invariant ; $t_{\vec{0}}$ est l'application identique du plan

b) Réflexion

<u>Définition</u> : Le point M a pour image M' par la réflexion d'axe Δ ($s_{(\Delta)} : M \rightarrow M'$) signifie que :

- Si $M \notin (\Delta)$, Δ est la médiatrice de $[MM']$
- Si $M \in (\Delta)$, $M = M'$

<u>Point invariant</u> : Les points invariants de $s_{(\Delta)}$ sont les points de Δ.

c) Homothétie

<u>Définition</u> : Soit un réel k non nul. Le point M a pour image le point M' par l'homothétie de centre O et de rapport k ($h_{(O,k)} : M \rightarrow M'$) signifie que $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$

<u>Point invariant</u> : - Si $k \neq 1$, le centre O est le seul point invariant.
- Si $k = 1$, tout point du plan est invariant ; $h_{(O,1)}$ est l'application identique du plan.

<u>Cas particulier</u> : Si $k = -1$, $h_{(O,-1)}$ est la symétrie de centre O.

d) Rotation

<u>Définition</u> : Le point M a pour image le point M' par la rotation de centre O et d'angle α ($r_{(O,\alpha)} : M \rightarrow M'$) signifie que

- Si $M \neq O$ alors $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = \alpha$
- Si $M = O$ alors $M = M'$

<u>Point invariant</u> : - Si $\alpha \neq 0 + 2k\pi$ alors le centre O est le seul point invariant
- Si $\alpha = 0 + 2k\pi$ alors tout point du plan est invariant ; $r_{(O,0)}$ est l'application identique du plan.

<u>Transformation réciproque</u> : comme $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}) = -\alpha$, $r_{(O,\alpha)}$ est bijective. La transformation réciproque de $r_{(O,\alpha)}$ est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ et $r_{(O,\alpha)}^{-1} = r_{(O,-\alpha)}$

<u>Cas particulier</u> : la rotation de centre O et d'angle π est la symétrie de centre O.

3) Propriétés des transformations

<u>a) Isométrie</u>

- Les translations, les réflexions et les rotations sont des isométries
  Elles conservent les distances et donc les aires et les volumes.

---

[1] **Définition**
Une transformation f du plan est une bijection si tout point du plan est l'image par f d'un point unique. Cela revient à dire que tout point M du plan a un, et un seul, antécédent par f. On appelle fonction réciproque de f la fonction qui, à tout point du plan, associe cet unique antécédent ; elle est notée f^{-1}.

$$M \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M'$$

• Si $k \notin \{-1;1\}$ alors l'homothétie $h_{(O,k)}$ n'est pas une isométrie, les distances sont multipliées par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$

b) Image d'un point d'intersection de deux figures

Soit une transformation f, deux figures F_1 et F_2 se coupant en M.
Alors M', image de M par la transformation f, est l'intersection des figures $F_1' = f(F_1)$ et $F_2' = f(F_2)$

c) Images de points alignés

Théorème : Soient A, B et C trois points et λ un nombre réel tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. A', B' et C' leurs images respectives par une translation, une réflexion, une rotation ou une homothétie alors $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$

Conséquences :
- L'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$ ($\lambda = \frac{1}{2}$)
- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ ($\lambda \in [0;1]$)
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

d) Images de figure usuelles

Par une translation, une réflexion, une homothétie ou une rotation, l'image d'une figure F (triangle, cercle, parallélogramme, losange, rectangle, carré, etc ...) est une figure F' de même nature. Ces transformations conservent le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et le contact entre figures (tangentes).
Une translation, une rotation, une homothétie conservent les angles orientés tandis qu'une réflexion transforme un angle orienté en son opposé.

4) Exercices

a) Etude d'une figure *Triangle et droite d'Euler*

Il s'agit de démontrer, à l'aide d'une homothétie, que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à un triangle sont alignés.

b) Ensemble de points

Soient un cercle C de centre O et de rayon r, deux points A et B.
Pour tout point M de C, on construit le point P tel que $ABMP$ soit un parallélogramme.
Quel est l'ensemble des points P lorsque M décrit C ?

c) Problème de construction

Il s'agit de tracer la médiane issue de A sachant que le point A est inaccessible (imaginer une feuille déchirée) :