RESOLUTION DES EQUATIONS IRRATIONNELLES PAR IMPLICATIONS

1) Soit la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{4x^2 + 5x - 3}{x^2 + x + 1}$.

   a) Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\mathbb{R}$?

   b) *Deux équations de même ensemble de résolution sont équivalentes lorsqu'elles ont la (ou les) même(s) solution(s).*

   Résoudre l'équation $f(x) = 2$ par équivalence.

2) Soit l'équation $\sqrt{2x-3} = \dfrac{6-x}{\sqrt{x}}$ (1)

   a) En déduire que si a est solution (1) alors a appartient nécessairement à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2};6\right]$.

   b) Prouver que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2};6\right]$, l'équation (1) est équivalente à l'équation $x(2x-3) = (6-x)^2$ (2).

   Résoudre l'équation (2) dans $\left[\dfrac{3}{2};6\right]$.

   En déduire les solutions de l'équation (1).

   c) Pour résoudre des équations irrationnelles, la détermination des conditions équivalentes est souvent délicate. Elle peut être plus difficile que dans l'exemple étudié.

   Pour revenir à cet exemple, si a est solution de l'équation (1) alors a est solution de l'équation (2) car

   $\sqrt{2x-3} = \dfrac{6-x}{\sqrt{x}}$ entraîne $x(2x-3) = (6-x)^2$ ($A=B \Rightarrow A^2=B^2$)

   Mais la réciproque n'est pas vraie puisque $A^2=B^2$ entraîne $A=B$ ou $A=-B$.

   L'ensemble des solutions de l'équation (1) est donc une partie de l'ensemble des solutions de l'équation (2). Il suffit donc de résoudre l'équation (2) dans $\mathbb{R}$ et de déterminer parmi les solutions de (2) celles qui sont solutions de (1).

   Quelles sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (2) ?

   Vérifier si les solutions de l'équation (2) sont solution de l'équation (1).

   Conclure.

   En conclusion, à la résolution des équations irrationnelles par équivalence (2)a) et 2)b)), on peut préférer cette méthode dite par implications.

3) Résoudre par implications les deux équations irrationnelles suivantes :

   a) $\sqrt{x(4x+15)} = 15 - 2x$

   b) $x = \sqrt{2x+3}$