Eléments de symétrie d'une courbe

(C) est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Changement de repère

Le point A a pour coordonnées $(a;b)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$. Un point M du plan a des coordonnées (x,y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X,Y) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$; vectoriellement, cela signifie que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{AM} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$. Le relation de Chasles sur les vecteurs permet alors d'obtenir les formules de changement de repère :

De $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, on trouve $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

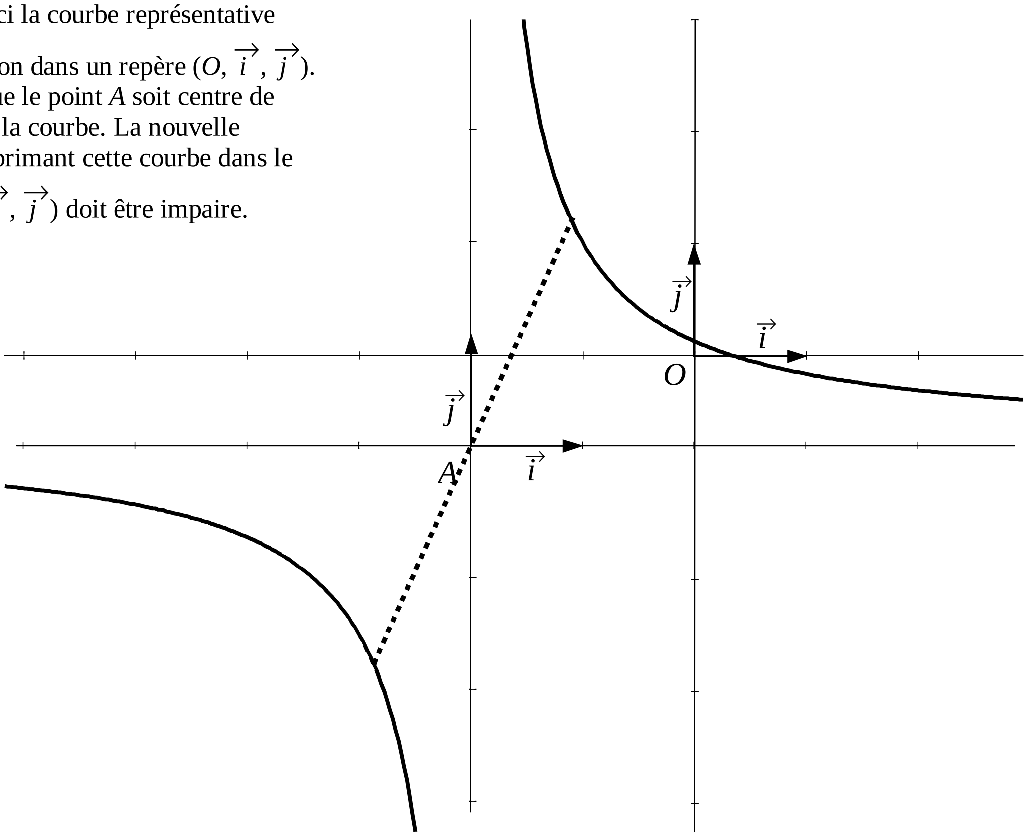
Ce changement de repère conduit à une équation de la courbe (C) dans le nouveau repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$:

$M \in (C) \Leftrightarrow y = f(x)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\Leftrightarrow Y = g(X)$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ en ayant utilisé les formules de changement de repère

Si g est paire alors l'axe $(A, \vec{j})$ est axe de symétrie de (C)
Si g est impaire alors le point A est centre de symétrie de (C)

On a tracé ici la courbe représentative d'une fonction dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Il semble que le point A soit centre de symétrie de la courbe. La nouvelle fonction exprimant cette courbe dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ doit être impaire.



Axe de symétrie

Pour démontrer que la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe (C) :

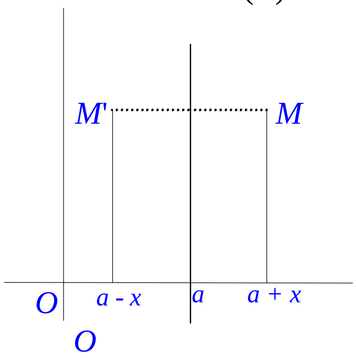
Méthode 1 : par le changement de repère

Ω est le point de coordonnées $(a;0)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On montre que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) est la courbe représentative d'une fonction paire.

Méthode 2

On montre que :

- si $a + x$ est dans D_f alors $a - x$ est aussi dans D_f.
- $f(a + x) = f(a - x)$



Application :

f est la fonction définie sur |R par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$

Démontrer, en utilisant les deux méthodes, que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

Centre de symétrie

Pour démontrer que le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) :

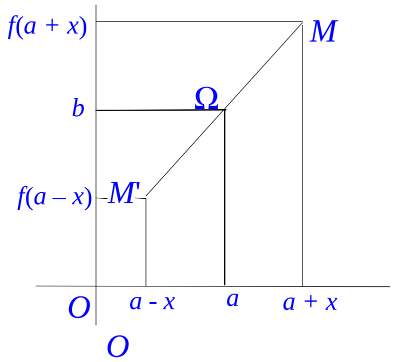
Méthode 1

On montre que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) est la courbe représentative d'une fonction impaire.

Méthode 2

On montre que :

- si $a + x$ est dans D_f alors $a - x$ est aussi dans D_f.
- $\dfrac{f(a + x) + f(a - x)}{2} = b$



Application :

f est la fonction définie sur |R par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Démontrer, en utilisant les deux méthodes, que le point $\Omega(-1;-2)$ est un centre de symétrie de (C)