

Devoir Première S

Exercice 1 Le crible de Matiyasevich¹

On considère la parabole P d'équation $y = x^2$ dans un repère du plan. Soit m et n deux entiers naturels strictement supérieurs à 1.

On note $M(m)$ le point de P d'abscisse m et $N(n)$ le point de P d'abscisse $-n$.

1) Conjecture

Après avoir tracé P , recopier le tableau et le compléter par lecture graphique :

m	2	2	2	3	3	3	4	4	4
n	2	3	4	2	3	4	2	3	4
Ordonnée à l'origine de (MN)									

Quelle conjecture peut-on faire sur l'ordonnée à l'origine de la droite (MN) ?

2) Démonstration

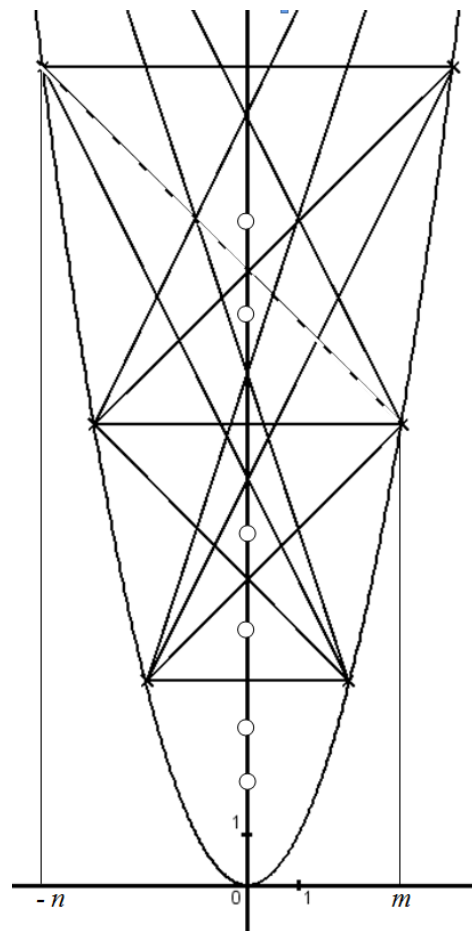
Déterminer en fonction de m et n une équation de la droite (MN) .

Quelle est son ordonnée à l'origine ?

3) Application

Sur la figure ci-contre, on a tracé les segments $[MN]$ pour les premières valeurs de m et n .

Quelles particularités ont les ordonnées entières y ($y > 1$) des points de l'axe des ordonnées non traversées par l'un des segments ?



Exercice 2 Distance d'un point à une droite

Dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec pour unité graphique 1cm, on considère la droite D d'équation $y = 5 - 2x$.

1) Tracer la droite D sur votre feuille. Une variante à privilégier est de faire la figure de cet exercice sur un logiciel de géométrie plane du type Geoplan et de faire une impression de votre capture d'écran (logiciel disponible gratuitement sur internet ou en me le demandant).

2) Rappeler la définition de la distance d'un point à une droite.

Evaluer cette distance (avec votre règle ou le logiciel).

3) On note M le point de D d'abscisse x .

Exprimer la distance OM en fonction de x .

4) Soit $f(x) = OM^2$.

a) Montrer que $f(x) = 5(x - 2)^2 + 5$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

5) a) En déduire le sens de variation de la fonction qui à tout x réel associe OM (le sens de variation de la fonction racine carrée étant supposé connu).

b) En déduire le point M de D pour lequel OM est minimale.

c) Calculer la valeur exacte de OM et comparer avec le résultat expérimental.

¹ Ce crible est dû à deux mathématiciens russes contemporains Yuri Matiyasevich et Boris Stechkin. Yuri Matiyasevich, né le 2 mars 1947 à Léninegrad (actuelle Saint-Petersbourg) suggéra en 1971 l'emploi de cette propriété de la parabole pour construire une "table de multiplication géométrique" ; Boris Stechkin eut ensuite l'idée de visualiser ainsi les nombres premiers.