SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

I) Systèmes d'équations 2×2

1) Rappels

Un système de deux équations à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme : $(S)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. On appelle déterminant de ce système le nombre : det(S) = ab' - $a'b$.

Lorsque det(S) ≠ 0, le système admet un **unique** couple solution.

Lorsque det(S) = 0, le système n'admet pas de solution ou une infinité de couples solutions. Dans ce cas, on peut toujours écrire les équations du système de sorte qu'elles aient même premier membre.

Exemples : (i) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=5 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$

2) Applications

d et d' sont deux droites dont on connaît des équations dans un repère donné. Déterminer dans chacun des cas suivants l'intersection éventuelle de d et d.

a) d : $2x - 3y - 1 = 0$ et d' : $5x + y - 2 = 0$

b) d : $5x + 2y - 3 = 0$ et d' : $10x + 4y - 1 = 0$

c) d : $x -1{,}5y - 0{,}5 = 0$ et d' : $6x - 9y - 3 = 0$

II) La méthode de Gauss

1) Systèmes triangulaires

Résoudre le système, dit triangulaire, suivant : $\begin{cases} 3x-4y+5z=19 \\ \quad 7y-3z=6 \\ \qquad 4z=20 \end{cases}$.

2) La méthode de Gauss

Le but de la méthode de Gauss est de transformer, de manière équivalente, un système (S) en un système triangulaire (S') beaucoup plus facile à résoudre et ayant le même ensemble de solution que le système initial.

exemple : Soit le système $(S)\ \begin{cases} x+10y-3z=5 & (L_1) \\ 2x-y+2z=2 & (L_2) \\ -x+y+z=-3 & (L_3) \end{cases}$

1ère étape : Eliminer x dans les équations (L_2) et (L_3) en utilisant des combinaisons linéaires avec l'équation (L_1). Le système (S) devient alors le système $(S')\ \begin{cases} x+10y-3z=5 & (L_1) \\ -21y+8z=-8 & (L_2) \\ 11y-2z=2 & (L_3) \end{cases}$

2ème étape : Eliminer y dans l'équation (L_3) en utilisant une combinaison linéaire avec l'équation (L_2).

Le système (S') devient alors le système triangulaire $(S'')\ \begin{cases} x+10y-3z=5 & (L_1) \\ -21y+8z=-8 & (L_2) \\ \dfrac{46}{21}z=-\dfrac{46}{21} & (L_3) \end{cases}$

3ème étape : Il reste à résoudre le système (S'') qui a le même ensemble de solutions que le système initial (S).

3) Applications

Résoudre, par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}3x+4y+z=7\\ x+2y-z=13\\ 2x-y+2z=5\end{cases}\quad (S_4)\begin{cases}x+y+z+t=5\\ x+2y+3z-2t=-3\\ x+3y+4z-4t=-9\\ x+4y+7z+8t=29\end{cases}\quad (S_3)\begin{cases}2x-2y+3z=4\\ x+2y-6z=4\\ x+8y-21z=6\end{cases}\quad (S_4)\begin{cases}2x+3y-2z=2\\ 9y-5z=0\end{cases}$$

III) Quelques situations

1) Mise en équation et résolution

Pierre dit à Paul : "J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons cent vingt-six ans à nous deux."

Quel est l'âge de Pierre, quel est l'âge de Paul ?

(indication : noter x l'âge de Paul et y la différence entre l'âge de Pierre et l'âge de Paul)

2) D'après un texte d'Euler

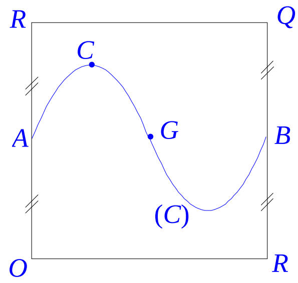
Trois personnes A, B et C jouent à un jeu d'argent. Chaque partie a un perdant et deux gagnants. Le perdant donne de l'argent à chaque gagnant de sorte que chaque gagnant double la somme qu'il possédait avant la partie. Trois partie sont jouées : A perd la première, B la seconde et C la troisième.

Après ces trois parties, chaque joueur possède 24 louis.

On demande la mise initiale de chaque joueur.

(indication : noter x la mise initiale de A, y celle de B, z celle de C et déterminer l'avoir final de chaque joueur en fonction de ces inconnues)

3) Cloisonnement



Dans une pièce carré $OPQR$ de 10 mètres de côté, on installe une cloison verticale dont la trace au sol est représentée par la courbe C, ci-contre sur la figure. On note A le milieu de [OR], B celui de [PQ] et G le centre du carré.

On considère le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant définis par :

$$\vec{i} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OP} \text{ et } \vec{j} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OR}.$$

a) Quelles sont, dans ce repère, les coordonnées de A, de B et de G ?

b) On donne les coordonnées (3;7) du point C.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Trouver les nombres a, b, c, d.

4) Un chasseur sachant compter

Héraclès est un fameux chasseur, un courageux explorateur, et aussi un excellent calculateur, à tel point que pour compter les bêtes d'un troupeau, il préfère compter les pattes ou leurs cornes. Un jour, en Afrique, il repère trois troupeaux distincts : des girafes, des hippopotames, des buffles. Il a compté un total de 208 pattes et de 88 cornes. De plus, il a remarqué que 22 animaux n'étaient pas des girafes. Héraclès peut-il connaître le nombre de girafes ? d'Hippopotames ? de buffles ?

(indication : les hippopotames n'ont pas de cornes, les girafes et les buffles ont deux cornes)

IV) Systèmes d'inéquations linéaires

1) Rappels

L'ensemble des couples $(x;y)$ solutions de l'équation $ax + by + c > 0$ est représenté graphiquement par les points d'un demi-plan dont la frontière est la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exemple :

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $x + 2y - 3 > 0$, on trace la droite d d'équation $x + 2y - 3 = 0$. Pour savoir quel demi-plan de frontière d représente les solutions de l'inéquation $x + 2y - 3 > 0$, on choisit un point non situé sur d (par exemple, dans ce cas, le point $O(0;0)$). Si on note P le demi-plan solution, comme O n'appartient pas à P (les coordonnées de O ne vérifient pas l'inéquation), P est alors le demi-plan ouvert de frontière d ne contenant pas O.

2) Applications

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 2x - y - 2 > 0 \\ x - 2y - 2 < 0 \\ -x - y + 5 > 0 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 10 \le x \le 30 \\ 20 \le y \le 50 \\ 40 \le x + y \le 65 \end{cases}$$

3) Existence d'un triangle

x et y sont deux réels positifs donnés. Par la suite, on dira que "x et y vérifient la condition T" pour indiquer que l'on peut construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs x, y et 1.

a) Supposons que x soit le plus grand de ces trois réels (x ¤ y et x ¤ 1). Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que x ¤ y et x ¤ 1. Parmi ces points, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la condition T ?

b) Reprendre le a) sur le même repère lorsque

(i) y ¤ x et y ¤ 1(ii) 1 ¤ x et 1 ¤ y

3) Quels sont les points qui correspondent à des triangles isocèles ? à des triangles équilatéraux ?

V) Programmation linéaire

L'entreprise Piecinox fabrique des pièces en inox. Ces pièces, de deux types A et B, sont fabriquées par lots dans un atelier où sont rassemblées : une machine pour la découpe de l'inox, une machine pour l'emboutissage, une machine pour le polissage et la finition. Chaque machine fonctionne au plus 120 heures par mois. Les caractéristiques de fabrication sont rassemblées dans le tableau suivant :

	Coût de l'heure-machine	**Pour un lot *A***	**Pour un lot *B***
Découpe	20 F	1 h	1,5 h
Emboutissage	30 F	0,5 h	1 h
Polissage et finition	40 F	2 h	1,25 h
Coût de l'inox utilisé		50 F	68 F
Prix de vente		200 F	210 F

On suppose que la production mensuelle est entièrement vendue. Le but de l'exercice est de trouver le nombre de lots A et le nombre de lots B que l'entreprise doit fabriquer mensuellement pour obtenir un bénéfice maximal.

1) Notons x le nombre de lots A et y le nombre de lots B fabriqués mensuellement. Ecrire les inéquations d'inconnues x et y qui traduisent les contraintes d'utilisation des trois machines pendant un mois.

2) Dans un repère orthogonal, représenter l'ensemble D des points dont les coordonnées $(x;y)$ sont solutions des inéquations précédentes.

3) Quel est le bénéfice réalisé sur la vente de chaque lot A ? de chaque lot B ?

4) Recherche du bénéfice maximal.

a) Notons b un bénéfice souhaité. Les points de la droite d d'équation $35x + 32y = b$, qui sont situés aussi dans le domaine D, correspondent aux programmes $(x;y)$ qui assurent à l'entreprise un bénéfice b. Pourquoi ?

b) Sur la figure obtenue à la question 2), représenter l'ensemble des points de D qui correspondent à un bénéfice de 640 F, puis de 1 920 F, puis de 2 450 F.

c) Noter que la droite d passe par le point $M(0;\frac{b}{32})$. Le bénéfice est d'autant plus grand que ce point M est plus haut. Noter aussi que, lorsque b varie, toutes les droites d d'équation $35x + 32y = b$ sont parallèles. Pourquoi ?

d) Trouver alors graphiquement le nombre de lots A et le nombre de lots B que l'usine doit fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.