Contrôle Première S

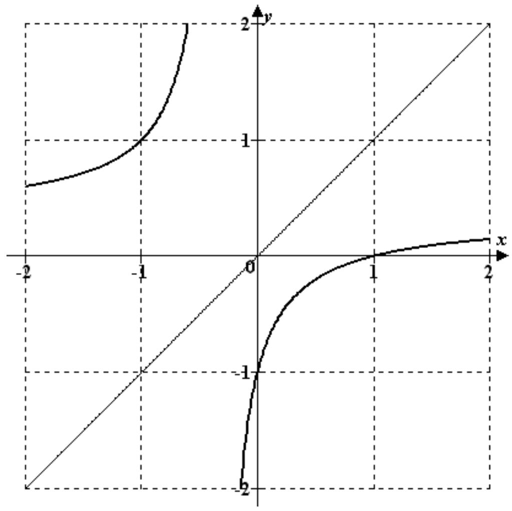
Exercice 1 (5 points)

On considère la suite $(w)_{n \geq 1}$ définie par : $w_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}$

1°) Calculer les valeurs exactes de w_1, w_2 et w_3.
2°) Donner l'expression de w_{n+1} pour tout entier naturel n.
3°) Déterminer la monotonie de la suite (w_n).

Exercice 2 (5 points)

On a tracé, ci-contre, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbf{R}\backslash\{^{-1}/_3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+1}$.



Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{3u_n + 1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$

1°) En utilisant la droite (Δ) d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction f, construisez, en justifiant, les termes u_1, u_2, u_3 et u_4. Que remarque-t-on ?
2°) Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de u_{n+2} en fonction de u_n.
3°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+3} = u_n$.

Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie (V) ou fausse (F).

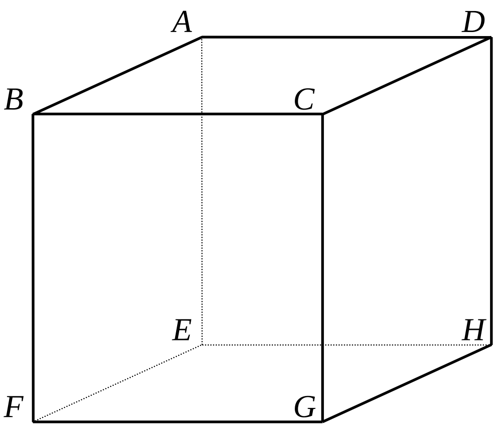
1°) Soit u une suite telle que, pour tout entier n, $u_n < 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est décroissante.	
2°) Soit u une suite telle que, pour tout entier n, $u_n < 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite u est croissante.	
3°) Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 < 0$ et de raison $r > 0$, alors la suite u est décroissante.	
4°) Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $r = ¼$, alors la suite u est croissante.	
5°) Soit u une suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = (u_n)^2$, alors la suite u est croissante.	

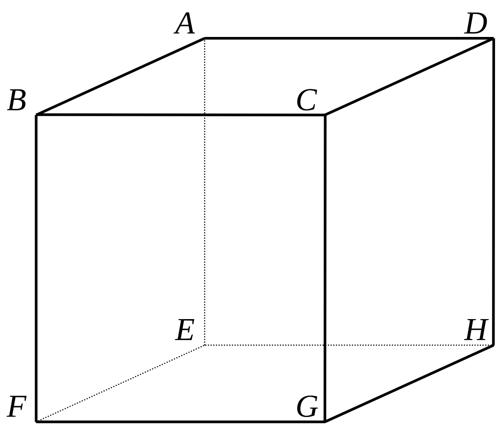
Attention *: les mauvaises réponses seront comptées négativement*

Exercice 4 (5 points)

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le centre de la face $ABCD$ et J le milieu de $[BF]$.

1°) Tracer dans le cube 1, sans justifier, la section du cube par le plan (AGJ).
2°) Tracer dans le cube 2, sans justifier, la section du tétraèdre $ACFH$ par le plan (BDH)



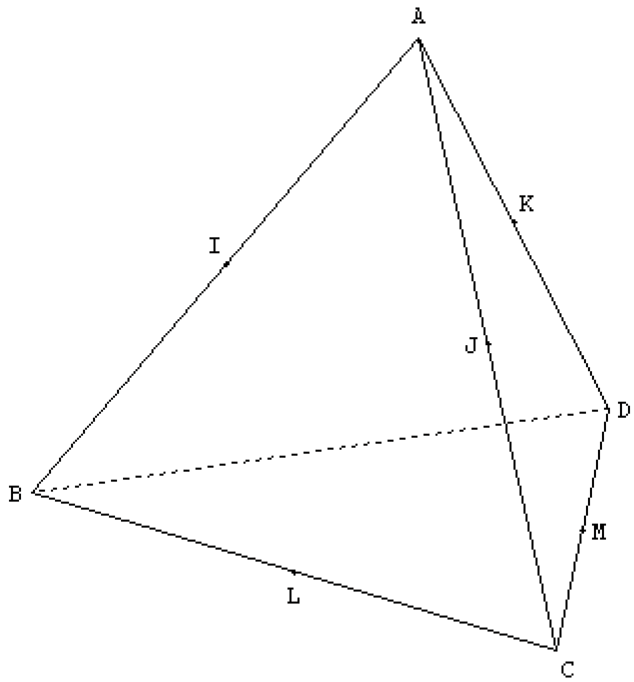


Exercice 5

Le dessin ci-dessous représente (en perspective cavalière) le tétraèdre régulier *ABCD*, c'est à dire tel que :
$AB = AC = AD = BC = BD = CD = a$ où a est un réel strictement positif.

I est le milieu de [*AB*]. *J* est le milieu de [*AC*]. *K* est le milieu de [*AD*]. *L* est le milieu de [*BC*].
M est le milieu de [*CD*].

1) Démontrer que la droite (*AB*) est orthogonale au plan (*ICD*).
En déduire que les droites (*AB*) et (*CD*) sont orthogonales.
2) Prouver que les plans (*BCD*) et (*IJK*) sont parallèles.
3) Démontrer que la section plane du tétraèdre *ABCD* par le plan (*IKL*) est le quadrilatère *IKML*.
4) Montrer que *IKML* est un losange.
5) Exprimer *IC*, *ID*, *KC* et *KB* en fonction de *a*. En déduire que : $IM = LK = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Conclure que *IKML* est un carré.



Exercice 6

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : *A*(6;0;6), *B*(6;6;6), *C*(0;6;6), *D*(0;0;6), *E*(6;0;0), *F*(6;6;0), *G*(0;6;0).
1) Faire une figure. On admettra que le polyèdre *ABCDOEFG* est un cube (que l'on tracera).
2) On appelle *I*, *J*, *K* les milieux respectifs des segments [*AD*], [*BC*] et [*FG*].
a) Déterminer les coordonnées des points *I*, *J*, *K*.
b) Démontrer que les points *O*, *I*, *J* déterminent un plan unique, que l'on notera (*P*).
c) Le point *K* appartient-il au plan (*P*) ?
3) Déterminer la nature, le périmètre et l'aire du quadrilatère *OIJG*.
4) Soit Δ la droite passant par le point *A* et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;2)$.
a) Tracer la droite Δ. Le point *K* appartient-il à Δ ?
b) Démontrer que la droite Δ est parallèle au plan (*P*).