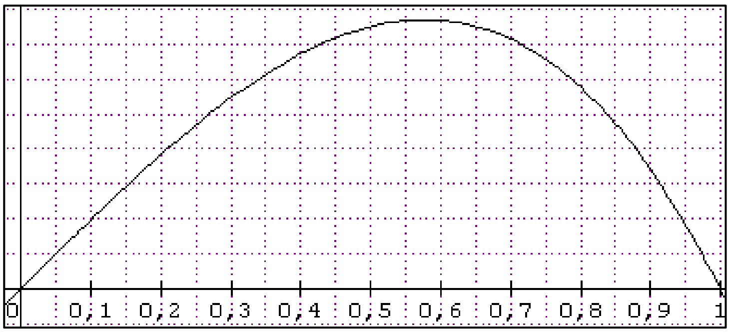
Contrôle Première S_6

Exercice 1 (4 points)

La courbe C ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle [0;1] par:

$$f(x) = x - x^3 .$$

A est le point de C d'abscisse 0,8.



1) Pourquoi la courbe C possède-t-elle une tangente T au point A ?
   Déterminer l'équation de T.

2) Pour quelle valeur de $x \in [0;1]$, la courbe C a-t-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?
   La réponse doit être justifiée.

Exercice 2 (4,5 points)

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Sans justification, entourer la réponse exacte.
Ne pas répondre au hasard : 2 erreurs annulent une réponse exacte.

Si f et g sont croissantes sur I, alors $f + g$ est croissante sur I.	VRAI	FAUX
Si f et g sont croissantes sur I, alors $f \times g$ est croissante sur I.	VRAI	FAUX
Si f est strictement croissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, on a : $f\,'(x) > 0$.	VRAI	FAUX
Si $a \in I$ et si $f\,'(a) = 0$ et si pour tout $x \in I$ avec $x \neq a$, on a : $f\,'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.	VRAI	FAUX
Si $a \in I$ et si $M = f(a)$ est le maximum de f sur I, alors $f\,'(a) = 0$.	VRAI	FAUX
Si f n'est pas monotone sur I, alors, il existe $a \in I$ tel que $f\,'(a) = 0$.	VRAI	FAUX

Exercice 3 (3 points)

La fonction f est définie par $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{2x - 1}$.

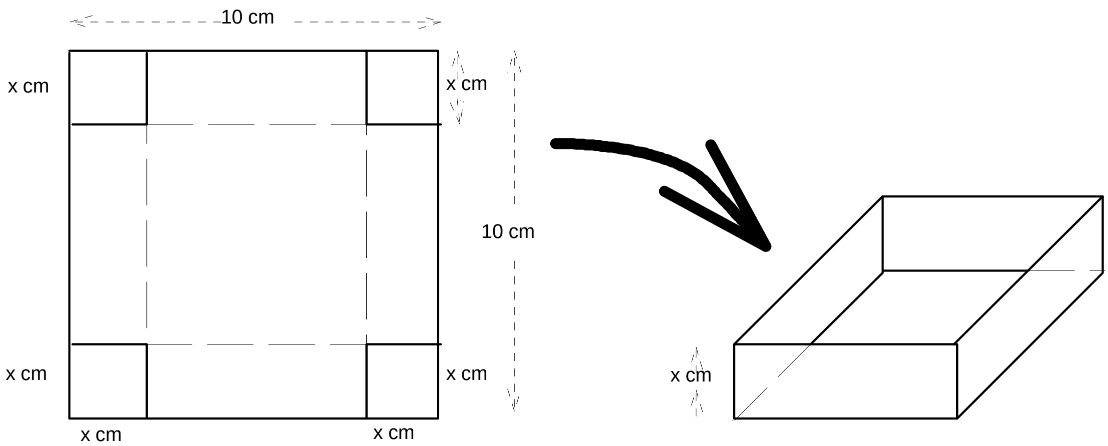
1) Sur quel ensemble la fonction f est-elle définie ? dérivable ? Justifier.

2) Démontrer, en précisant les détails des calculs et les formules utilisées, que la fonction dérivée de f est définie par $f\,'(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{(2x - 1)^2}$.

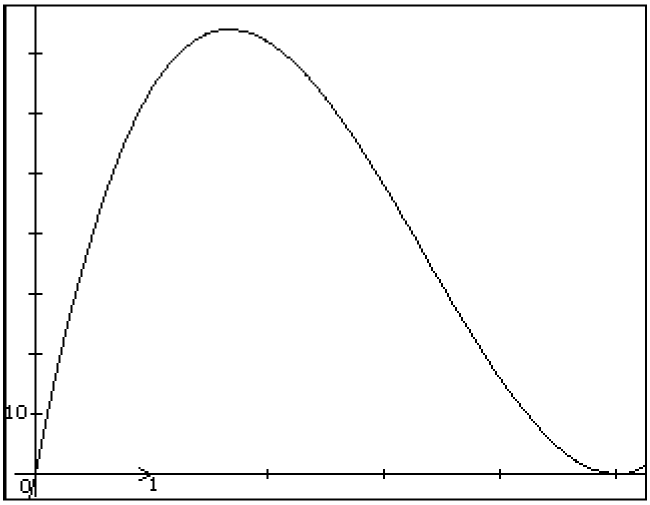
3) Déterminer les variations de la fonction f.

Exercice 4 (4 points)

On découpe les quatre coins d'une plaque métallique carrée de 10 cm de côté et on remonte les bords afin d'obtenir une boîte sans couvercle à base carrée, comme schématisé ci-dessous:



1) Dans quel intervalle doit-on prendre le nombre x pour que la construction soit possible? Justifiez votre réponse.
2) Exprimez en fonction de x, le volume $V(x)$, en cm^3, de la boîte sans couvercle ainsi réalisée. Justifiez votre réponse.



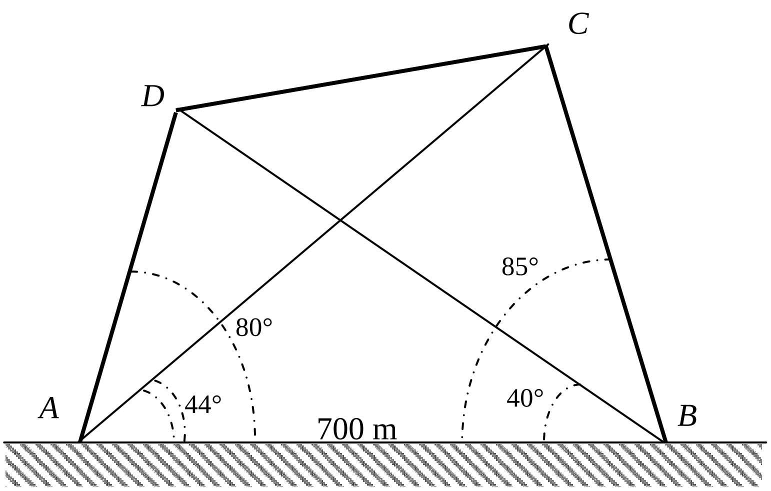
Le raisonnement précédent permet d'obtenir la fonction polynôme V du troisième degré de la variable x :

$$V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Ci-contre est la représentation graphique de la fonction V dans un repère orthogonal.

3) D'après le graphique, le volume de la boîte semble être maximum pour une valeur de x située entre 1 et 2 cm. Grâce à l'étude des variations de la fonction V, déterminer la valeur exacte de x donnant un volume $V(x)$ maximum. Donner une approximation de ce maximum à 1 mm^3 près.

Exercice 5 (4,5 points)
Un bassin piscicole, implanté sur une côte, a la forme d'un quadrilatère comme l'indique la figure ci-dessous :



$AD + DC + CB = l$ représente la longueur de filet nécessaire pour clore le bassin.

1) a) Calculer $\widehat{ADB}$.
   b) En déduire AD et DB.
2) a) De la même manière, en utilisant pour le triangle ABC les renseignements portés sur la figure, calculer BC.
   b) A l'aide du théorème d'Al-Kashi, déterminer la longueur DC.
   c) En déduire la longueur l de filet nécessaire pour clore le bassin.
3) Calculer en m² l'aire du bassin.