

La martingale de d'Alembert

Au jeu de PILE ou FACE, on mise une certaine somme (1€ par exemple), on lance une pièce parfaitement équilibrée et on observe sur quelle face elle tombe. Si elle tombe sur PILE (P), alors le joueur gagne sa mise, soit 1€, sinon le joueur perd sa mise.

Un joueur décide de jouer à ce jeu en utilisant la stratégie suivante : il mise 1€ sur PILE (P). S'il gagne, il s'arrête et, s'il perd, il rejoue P en misant le double de sa mise, soit 2€. S'il gagne, il s'arrête et, s'il perd, il rejoue P en misant 4€. Et ainsi de suite en doublant à chaque fois s'il perd.

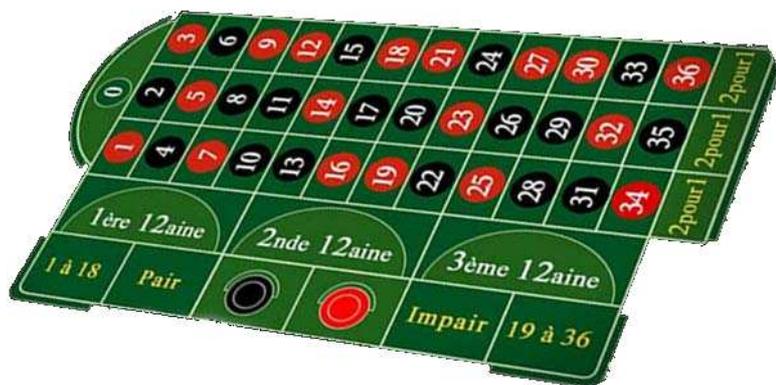
En résumé : s'il gagne, il s'arrête et, s'il perd, il rejoue P en doublant sa mise précédente.

On suppose que le joueur ne peut pas effectuer plus de 20 parties faute de temps. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de coups qu'il a fallu attendre au joueur pour gagner pendant ces 20 parties et $X = 0$ si le joueur ne réussit pas à gagner à l'issue des 20 parties.



- 1) Déterminer $P(X = k)$ pour $1 \leq k \leq 20$ puis $P(X = 0)$.
- 2) Supposons que le joueur gagne au $n^{\text{ème}}$ coup, $1 \leq n \leq 20$, faites le bilan de ses gains et de ses pertes.
- 3) Déterminer $E(X)$. En donner la signification.

A un jeu d'argent, les joueurs rêvent de pouvoir organiser leurs mises de telle sorte que leur gain soit assuré : ils sont à la recherche d'une *martingale*. Pour lutter contre l'efficacité de ces martingales et autres stratégies au jeu de la roulette, les casinos ont mis en place des limites qui fixent une mise minimale et une mise maximale. En France, sur le jeu de la roulette et lorsque l'on mise sur le résultat pair ou impair, la mise maximale est environ de 300 fois la mise la plus petite de 1€.



Si un joueur tente d'appliquer la martingale de d'Alembert, combien de parties peut-il réaliser en cas de pertes successives ? Pourquoi les casinos limitent-ils la mise maximale ? Quel est l'inconvénient principal de cette martingale ?

La martingale de d'Alembert fait partie du paradoxe de Saint-Pétersbourg concernant les jeux de hasard à espérance de gain strictement positive, voire infinie, où l'on peut réaliser un gain minime avec une probabilité très voisine de 1, à condition de miser une forte somme. Car, paradoxalement, une personne raisonnable préfère ne pas jouer. Ce comportement d'apparence irrationnelle s'appelle l'aversion au risque. Il a été formalisé par la notion de fonction d'utilité et a donné naissance à la théorie de la décision.

Ce paradoxe de Saint-Pétersbourg avait été soulevé par Pierre Raymond de Montmort auprès de Nicolas Bernoulli en 1713. Son cousin, Daniel Bernoulli, l'avait discuté dans les Transactions de l'Académie de Saint-Pétersbourg, d'où son appellation, reprise par Buffon, D'Alembert et Condorcet.