

## L'analyse de Buffon



Cet exemple est décrit par le célèbre naturaliste Buffon (1707-1788) dans son traité d'arithmétique morale " *On suppose que deux hommes (Pierre & Paul) jouent l'un contre l'autre, à ces conditions que Pierre jettera en l'air une pièce de monnaie autant de fois qu'il sera nécessaire pour qu'elle présente croix, & que si cela arrive du premier coup, Paul lui donnera un écu ; si cela n'arrive qu'au second coup, Paul lui donnera deux écus ; si cela n'arrive qu'au troisième coup, il lui donnera quatre écus, [...], & ainsi de suite en doublant toujours le nombre des écus [ ... ] On demande donc combien Pierre doit donner à Paul pour l'indemniser, ou ce qui revient au même, quelle est la somme équivalente à l'espérance de Pierre qui ne peut que gagner. "*

Buffon donne plus loin la réponse " *la somme équivalente à l'espérance de celui qui ne peut que gagner, est égale à la somme de la suite  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  écus, etc., continuée à l'infini, & que par conséquent cette somme équivalente est une somme d'argent infinie "*.

Il remarque que si Pierre obtient croix au trentième coup " *il serait dû à Pierre une somme de 520 millions 870 mille 912 écus, c'est-à-dire, autant d'argent qu'il en existe peut-être dans tout le royaume de France. Une somme infinie d'argent est un être de raison qui n'existe pas, & toutes les espérances fondées sur les termes à l'infini qui sont au-delà de trente, n'existent pas non plus "*.

Pour confronter le calcul mathématique avec l'expérience, Buffon fait jouer " *deux mille quarante-huit fois ce jeu en faisant jeter la pièce en l'air par un enfant "*. Il trouve des résultats résumés dans le tableau suivant :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de parties où croix est sorti au $n^{\text{ième}}$ lancer	1061	494	232	137	56	26	25	8	6
Gains de celui qui lance la pièce de monnaie	1061	988	928	1096	896	928	1600	1024	1536

Ces 2048 parties auraient donc fait gagner 10 057 écus à celui qui lance la pièce, soit un gain d'à peu près 5 écus par partie.

Autrement dit, si à chaque partie celui-ci met en jeu 5 écus, le jeu est presque équitable. Il est facile de calculer, avec la série finie des parties répertoriées par Buffon dans le tableau précédent, que celui dont l'espérance semblait si grande, en pariant seulement 5 écus à chaque partie, aurait réellement perdu 183 écus. Et encore aurait-il fallu qu'il jouât, à raison de deux minutes par partie et six heures par jour, pendant plus de onze jours.

On comprend mieux que Buffon puisse écrire, à propos de la mise du joueur qui lance la pièce " *Au lieu de donner une somme infinie, ou même une très grande somme, ce qui est déjà fort différent, il n'y a point d'homme de bon sens qui voulût donner vingt écus ni même dix, pour acheter cette espérance en se mettant à la place de celui qui ne peut que gagner. "*

D'après  $\pi$ xel, TS, Bordas, 2008.